

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

---

1

---

1 9 5 7

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

МАТЕМАТИКА, ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЕ,  
ПРИЛОЖЕНИЯ И ИСТОРИЯ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
Я. С. ДУБНОВА, А. А. ЛЯПУНОВА,  
А. И. МАРКУШЕВИЧА

ВЫПУСК 1

БИБЛИОТЕКА  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
КОЛЛЕДЖА НМУ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1957

8201

В составлении и редактировании  
принимали участие  
И. Н. БРОНШТЕЙН, А. М. ЛОПШИЦ, И. М. ЯГЛОМ

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ», вып. 1

Редактор *И. Н. Бронштейн*  
Техн. редактор *Н. А. Тумаркина*  
Корректор *И. С. Цветкова*

---

Сдано в набор 18/III 1957 г. Подписано к печати 15/VIII 1957 г. Бумага 60×92<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Физ. печ. л. 18. Условн. печ. л. 18. Уч.-изд. л. 19,38. Тираж 15 000 экз. Т-08109. Цена 5 руб. 80 коп. Заказ № 316.

---

Государственное издательство технической литературы  
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова  
Московского городского Совнархоза.  
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

## ОТ РЕДАКЦИИ

Рост математической культуры, охват ею всё более широкого круга лиц вызвали к жизни еще в прошлом веке появление журналов, рассчитанных не только на ученых, но и на всех получивших или получающих специальное математическое образование. Тематике таких журналов естественно был присущ широкий диапазон: от элементарной математики и ее преподавания до вопросов, разумеется, не слишком специальных, современной науки. Тем самым между средней и высшей школами осуществлялась жизненно необходимая связь, находившая себе выражение не только в содержании журналов, но и в составе авторов и в круге читателей. К этому типу близки в дореволюционной России «Вестник опытной физики и элементарной математики», «Математическое образование», за границей — «L'Enseignement mathématique» (Франция — Швейцария), «Americ. math. monthly» (США), «Periodico di matematica» (Италия), «Mathem. Gazette» (Англия), «Časopis» (Чехословакия). В советское время ту же роль исполняло, к сожалению, недолго, выходявшее отдельными выпусками и непериодически «Математическое просвещение».

В наши дни советский читатель, избравший своей специальностью математику, найдет в журнального типа литературе издания, посвященные либо методике школьного преподавания, либо истории математики, либо оригинальным научным исследованиям и их обзорам, написанным для специалистов. Между тем, многочисленные кадры нашей математической интеллигенции — большинство преподавателей вузов и старших классов средней школы, студенты университетов и пединститутов, инженеры, имеющие вкус к математике, — испытывают потребность в постоянном источнике, который расширял бы их научный кругозор, освежал и восполнял знания, наконец, стимулировал бы педагогическую и научную активность читателя в самых широких рамках: начиная от решения нешаблонных задач и кончая самостоятельными исследованиями. Именно на этого читателя мы и рассчитываем, возобновляя издание выпусков «Математического просвещения».

Удерживая старое название, мы намерены, однако, значительно расширить программу этого издания.

Существенную часть его составят обзоры работ по принципиальным вопросам современной математики и ее приложений. Мы будем заботиться о том, чтобы чтение этих статей не требовало чрезмерной подготовки от читателя. С другой стороны, последний не должен смущаться тем, что та или иная статья окажется для него мало доступной, — такова специфика журнала или сборника в противоположность учебнику или монографии. Будут помещаться также статьи по вопросам истории и методологии; однако, чтобы избежать параллелизма с существующими изданиями, мы ограничим себя темами, близкими к преподаванию. Таким образом, учитывая немалую книжную и журнальную литературу по так называемой частной методике преподавания, мы в крупных статьях сосредоточим внимание на программных вопросах (обсуждение учебных планов и программ для средней и высшей школы, проекты их изменения, анализ способов изложения отдельных математических дисциплин или важнейших их отделов). В числе упомянутых статей (как, впрочем, и в некоторых других случаях) мы будем нередко публиковать статьи зарубежных авторов, переводные и оригинальные.

Отдел «Научные сообщения» будет состоять из статей небольшого объема (до  $1\frac{1}{2}$  печ. листа), содержащих новые результаты из области элементарной и высшей математики, с одной стороны, не слишком частного характера, с другой — не требующих специальной подготовки.

Оригинальные варианты изложения отдельных тем из курсов средней и высшей школы, методические заметки по существенным вопросам преподавания найдут себе место в отделе «Научно-методические сообщения» (Опыт преподавания и педагогический эксперимент).

«Научная и методическая хроника» будет содержать материалы, относящиеся к: а) съездам, конференциям, юбилейным датам и некрологам; б) крупным событиям в математической жизни средней и высшей школы; в) работе кружков, олимпиадам; г) деятельности научных обществ и учреждений; д) крупным научным достижениям («Новости математической науки»). В этом отделе редакция предполагает освещать также и наиболее выдающиеся явления, происходящие за рубежом.

Большое значение придает редакция «Математической литературе», где наряду с обзорными статьями и рецензиями научной и педагогической литературы будут помещаться аннотации, а иногда только названия наших и зарубежных новинок.

Традицией изданий, подобных этому, является постоянный отдел задач и их решений. Об особенностях этого отдела в «Математическом просвещении» читатель может составить себе представление по редакционному вступлению, помещенному в настоящем выпуске (стр. 219).

В деле развития математической культуры через печать решение проблемы «писатель — читатель» не менее важно, чем в области художественной литературы. Мы надеемся слышать голос читателя и ждем проявлений его активности в самых разнообразных формах: от присылки статей и заметок до откликов на наши дискуссии и пожеланий относительно содержания сборников.

*Редакция  
«Математического просвещения».*

---

В промежутках, образующихся между статьями (по техническим условиям печатания), будут помещаться:

— хроникальные сообщения (главным образом из числа тех, которые поступили «в последнюю минуту» перед сдачей выпуска в печать),

— высказывания крупных математиков настоящего и прошлого, имеющие самостоятельное значение,

— краткие извлечения из зарубежной журнальной литературы,

— вопросы, обращенные к читателю, но не являющиеся ни задачами, ни проблемами в духе нашего отдела V. (Впрочем, как там, так и здесь ответы будут помещаться в одном из следующих выпусков.)

На этот перечень не следует смотреть как на исчерпывающий возможное содержание «промежутков», которое (в согласии с опытом некоторых родственных зарубежных изданий) будет характеризоваться двумя признаками: скромными размерами каждой заметки при ее повышенной «математической эмоциональности».

**Редакция.**

---

## ПАМЯТИ РОСТИСЛАВА НИКОЛАЕВИЧА БОНЧКОВСКОГО

редактора первой серии сборников  
«Математическое просвещение»

В дни великой Сталинградской битвы отдал свою жизнь Родине Ростислав Николаевич Бончковский.

Способный математик и талантливый популяризатор Р. Н. Бончковский живо интересовался вопросами преподавания математики, в осо-



Ростислав Николаевич Бончковский  
(1905—1942)

бенности в средней школе. Его усилиями были созданы в 1934 г. сборники «Математическое просвещение»; к работе в этом издании Р. Н. сумел привлечь многочисленный авторский коллектив из преподавателей вузов и средних школ. Сам Р. Н. был бессменным редактором



всех 13 выпусков «Математического просвещения» и автором ряда помещенных там статей<sup>1)</sup>.

Ростислав Николаевич Бончковский родился 7 января 1905 г. в Петербурге, в семье юриста. По окончании средней школы он учился сначала в Томском, а затем в Московском университете, где избрал своей специальностью геометрию. В 1929 г. Р. Н. опубликовал свою первую научную работу: «Об одном разбиении замкнутых многообразий»<sup>2)</sup>.

Педагогическую работу в вузах (Московский энергетический институт, Московский институт инженеров транспорта) Р. Н. сочетал с интенсивной литературной и редакционной деятельностью. Он много лет был редактором в Учпедгизе; авторы книг, редактированных Р. Н. по поручению Учпедгиза (А. Ф. Бермант и Л. А. Люстерник — «Тригонометрия», С. И. Зетель — «Новая геометрия треугольника»), с благодарностью вспоминают тщательную и компетентную работу Р. Н.

Огромный труд был вложен им в почти единоличное редактирование сборников «Математическое просвещение», издаваемых Объединенным научно-техническим издательством.

В популярную литературу Р. Н. сделал вклад своей интересной книжкой «Площади и объемы»<sup>3)</sup>. В форме, доступной учащемуся средней школы, и вместе с тем без замалчивания более тонких вопросов здесь изложены основные идеи учения о площадях и объемах. Изложение сопровождается рядом удачно поставленных вопросов, задач и упражнений.

Большую роль в деле пропаганды математических знаний и привлечения интересов школьников к математике сыграла брошюра Р. Н. Бончковского «Московские математические олимпиады 1935 и 1936 гг.»

Посещая средние школы и присутствуя на экзаменах, Р. Н. проявлял выдающийся педагогический такт в беседах с учащимися и учителями. Рекомендации, направленные на улучшение преподавания, давались им в такой форме и с такой убедительностью, что охотно принимались учителями.

Общавшиеся с Р. Н. Бончковским его друзья и товарищи никогда не забудут его приветливость, отзывчивость и навсегда сохраняют о нем светлую память.

---

<sup>1)</sup> «Геометрическое суммирование одного ряда» (вып. 1), «Покрытие плоскости правильными многоугольниками» (вып. 3), «Исследование функции третьей степени на максимум и минимум элементарными средствами» и «Заполнение пространства тетраэдрами» (вып. 4), «Покрытие плоскости квадратами, шестиугольниками и звездчатыми двенадцатугольниками» (вып. 5), «Теорема Эйлера о многогранниках» (вып. 6) и «О двух пучках чевиан и двух трансверсальных треугольника» (вып. 11).

<sup>2)</sup> «Сборник работ математического раздела Коммунистической Академии», Москва, 1929.

<sup>3)</sup> Издание АН СССР, Москва, 1937.

# ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ НА XIX МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ В ЖЕНЕВЕ

## 1. НА XIX МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО НАРОДНОМУ ПРОСВЕЩЕНИЮ

*А. И. Маркушевич*

1. В последнее время в Женеве ежегодно происходят международные конференции по народному просвещению. Проводятся они Организацией Объединенных Наций по просвещению, науке и культуре (ЮНЕСКО) совместно с Международным бюро по просвещению (сокращенно БИЕ). Последнее существует с 1925 г. Представление о его характере и задачах дает следующая выписка из статута этого учреждения:

«Соглашаясь в том, что развитие обучения и воспитания является существенным фактором мира и материального процветания человечества, что для содействия этому развитию надлежит собирать документацию об успехах теории и практики в области просвещения и обеспечивать широкий обмен информацией и документацией, чтобы каждая страна побуждалась использовать опыт других —

Статья первая:— Создается общественное учреждение общего значения под именем: „Международное бюро по просвещению“.

Статья вторая:— Цель Международного бюро по просвещению — служить центром информации обо всем, что относится к просвещению...».

При БИЕ имеется обширная международная библиотека по просвещению. Она содержит: собрание книг по психологии, педагогике, школоведению (70 000 томов), собрание школьных учебников 57 стран (15 000 томов), детскую литературу из 52 стран (14 000 томов), педагогические журналы (600 журналов, регулярно получаемых из 68 стран). Здесь можно найти и советскую учебно-педагогическую литературу за последние годы, издания Учпедгиза и Академии педагогических наук. Наконец, при БИЕ учреждена постоянная выставка по просвещению, на которой различные страны демонстрируют свою систему народного образования, учебные планы, учебники, наглядные пособия, книги для детей, детское техническое и художественное творчество и т. д. Там представлен и Советский Союз (с 1955 г.). Во

время XIX конференции открывались один за другим новые стенды выставки, посвященные Италии, Португалии, Австрии, США, Испании, Франции, Украине, Белоруссии, Бельгии и Швейцарии.

2. XIX конференция работала с 9/VII по 17/VII 1956 г. включительно в здании, занимаемом БИЕ. Здание это находится на берегу озера Леман; оно непосредственно сообщается с дворцом Вильсона, принадлежащим ООН. На первом этаже располагаются служебные помещения БИЕ, библиотека по просвещению и зал для заседаний. Этажом выше находится постоянная выставка по просвещению.

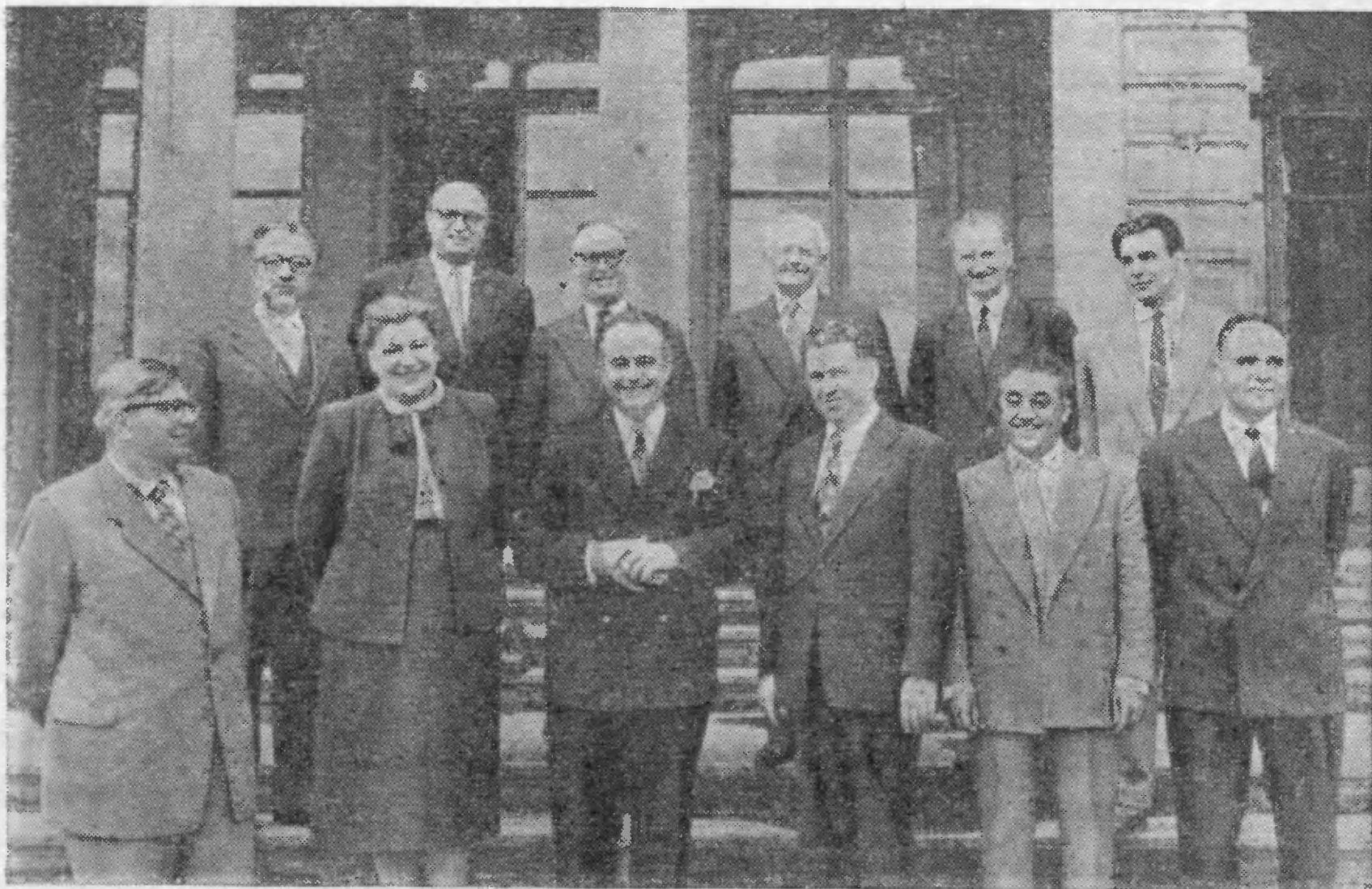
В повестке конференции были три вопроса: 1) школьная инспекция, 2) обучение математике в средних школах и 3) краткие отчеты министерств просвещения об изменениях в области просвещения в 1955—1956 гг.

Конференция открылась речью главы швейцарской делегации г-на Альфреда Бореля, государственного советника и руководителя отделом народного образования Женевского кантона. Затем было избрано бюро конференции в составе: Альфреда Бореля (президент), Рене дель Виюра (Чили), Эль Саеда Юссефа (Египет), г-жи Магды Иобору (Венгрия), Абдус Саттара (Пакистан) и П. Вильсона (США). После этого выступали генеральный директор ЮНЕСКО — Эванс и директор БИЕ, известный психолог профессор Пьяже. Проф. Пьяже подчеркнул, что задачей конференции является выработка *рекомендаций*, а не резолюций; рекомендации не имеют императивного характера и лишь выявляют то новое, что может помочь другим странам. Проблема инспекции уже рассматривалась около 20 лет назад, и теперь конференцию будет занимать прежде всего педагогический аспект проблемы, относящийся к роли инспектора как советника и вдохновителя учителя. В связи с математическим образованием в средней школе проф. Пьяже поставил вопрос о том, как некоторые общие идеи современной математики (он сослался здесь на идеи Бурбаки<sup>1)</sup>) должны сказаться на построении курса математики в средней школе. Он сообщил, что Международная комиссия по математическому образованию, представляющая Международную математическую ассоциацию, и Международная комиссия по

<sup>1)</sup> Николай Бурбаки — псевдоним, под которым коллектив известных французских математиков, включающий Андре Вейля, Анри Картана, Дьедонне и др., в течение многих лет публикует свои совместные работы и среди них фундаментальный труд «Элементы математики». Эта последняя работа, которую и имел в виду проф. Пьяже, ставит целью дать систематическое научное изложение основ современной математики. Первая часть работы (еще незавершенная — к 1955 г. было опубликовано 18 выпусков) имеет характерное заглавие «Фундаментальные структуры анализа». Говорят, что на некотором множестве определена *структура*, если установлены определенные отношения между элементами этого множества (или операции над этими элементами), выраженные в виде аксиом или в виде законов операций. К числу важнейших структур относятся *алгебраические* (пример: группа), структуры *порядка* (пример: решетка или структура в узком смысле слова) и *топологические* структуры (пример: евклидово пространство).



В зале заседания XIX международной конференции ЮНЕСКО — БИЕ.



Комиссия по выработке рекомендации по преподаванию математики. Третий слева на переднем плане — председатель комиссии проф. В. Сервэ (Бельгия).



изучению и усовершенствованию математического образования пришли к выводу, что соответствующая реформа содержания математического образования не только возможна, но и может облегчить обучение математике.

Далее проф. Пьяже отметил, что современная психология вскрыла распространенную в обучении математики ошибку, заключающуюся в смешении активных методов обучения с интуитивными. В действительности, усвоение математических знаний основывается на действии и операции, на интериоризированном<sup>1)</sup> действии в значительно большей мере, чем на созерцании. Этим определяется тесная связь между выдвигаемыми им проблемами содержания и методов, так как роль операций и действий выявляется при рассмотрении структур.

Взгляды проф. Пьяже получили дальнейшее освещение в последующих выступлениях участников конференции. Они нашли частичное отражение и в рекомендации по вопросам преподавания математики, принятой конференцией.

3. В конференции принимали участие 74 делегации, каждая из них с правом одного решающего голоса. Две из этих делегаций — делегации Марокко и Туниса — вначале участвовали в работе в качестве гостей и лишь на третий день по решению смешанной комиссии ЮНЕСКО — БИЕ включились в общую работу под дружные аплодисменты присутствующих.

Республики Советского Союза были представлены тремя делегациями во главе с зам. министра просвещения РСФСР т. Л. В. Дубровиной: от Советского Союза в целом, от Украины и от Белоруссии. В состав советской делегации входили два математика: министр просвещения Казахстана доц. А. З. Закарин и автор этой заметки.

На первом же заседании т. Л. В. Дубровина выступила от имени всех трех советских делегаций с заявлением об абсолютной ненормальности такого положения, когда Китайская Народная Республика с ее шестисотмиллионным населением и огромными успехами в деле народного просвещения до сих пор не представлена на международных конференциях по просвещению, и потребовала, чтобы руководство БИЕ наставало в смешанной комиссии ЮНЕСКО и БИЕ на приглашении КНР к участию в дальнейшей работе. Проф. Пьяже сообщил, что он вполне согласен с этим предложением и что его осуществлению мешает сопротивление ЮНЕСКО. Он обещал конференции добиваться приглашения Китайской Народной Республики.

4. Работа конференции была хорошо подготовлена и организована. Все участники получили в первый же день материалы, относящиеся к предстоящей работе, а именно: две печатные книги на французском или английском языке, заключающие ответы 62 стран на разработан-

<sup>1)</sup> *Интериоризация* — превращение внешне выполняемых операций в операции внутренние, выполняемые в уме.

ные БИЕ вопросы о состоянии школьной инспекции и преподавания математики и сравнительный обзор этих ответов, и, кроме того, по две большие папки с отчетами министерств по изменениям в области просвещения за 1955—1956 гг. в каждой стране. Эти документы избавляли от необходимости ставить доклады делегатов по вопросам повестки. Задача конференции свелась к обсуждению представленных материалов и к разработке рекомендаций, адресованных министерствам просвещения, по первым двум вопросам повестки. Для облегчения обсуждения конференция заслушала краткие обзорные доклады двух специально выделенных докладчиков: одного — руководителя делегации США г-на Финниса Е. Энглемана — по вопросам школьного инспектирования и другого — делегата Бельгии г-на Вилли Сервэ — по вопросам преподавания математики (перевод последнего доклада публикуется в настоящем выпуске на стр. 22—31). По каждому из этих вопросов избиралась комиссия для подготовки проекта соответствующей рекомендации, адресуемой министерствам просвещения всех стран. Председателями комиссий являлись соответствующие докладчики. От советских делегаций в члены комиссии по преподаванию математики вошел автор этой заметки. На обсуждение проектов рекомендаций, разработанных комиссиями, было выделено по одному пленарному заседанию, на которых обсуждались поправки и дополнения к отдельным статьям проектов. Чтобы придать этому обсуждению более деловой и не отнимающий лишнего времени порядок, было установлено, что по каждой поправке могут выступить не более чем два делегата: один за и один против.

Особо нужно отметить превосходную работу немногочисленного аппарата, обслуживавшего конференцию. В начале каждого заседания (а они проходили по 2 раза в день) делегаты находили в папке у своего места все необходимые материалы к предстоящему заседанию и отпечатанные на гектографе подробные протоколы предшествующего заседания.

5. В результате обсуждения двух первых вопросов конференция приняла две рекомендации, адресованные министерствам народного образования: рекомендацию № 42, относящуюся к школьному инспектированию, и рекомендацию № 43 по вопросам обучения математики в средних школах. В настоящем выпуске дается перевод полного текста рекомендации № 43 (стр. 15—22).

Готовя тексты рекомендаций, соответствующие редакционные комиссии вынуждены были считаться с существенными различиями в системах и самих принципах народного образования, принятых в различных странах. И всё же принятые документы, в которых, на наш взгляд, получила отражение общая, прогрессивная тенденция, преобладавшая в работе конференции, являются убедительным свидетельством того, что педагоги различных стран, воодушевленные стремлением к международному сотрудничеству, нашли общий язык в постановке существенных вопросов народного образования.

В рекомендации № 43 в разделе «Цели обучения математике» вполне обосновано подчеркивается воспитательная роль математического образования, относящаяся к формированию ума и характера учащихся. Обращает внимание перечисление в статье тех свойств, качеств, навыков и умений, развитие которых связано с изучением математики и среди них, помимо того, что обычно упоминается в этом аспекте, — умение схематизировать, специализировать (прилагать готовую схему к выделенному специальному случаю), способность воображения в абстрактных вопросах и т. д. В связи с этими, конечно, не единственными, но весьма важными и в принципиальном, и в практическом отношении целями перед нашими специалистами в области методики преподавания математики встает вопрос о том, на каком именно материале и какими средствами можно добиться наилучших результатов в их реализации.

Статья 14 раздела «Программы» перекликается с пожеланиями проф. Пьяже. Здесь речь идет о *многозначных структурах* (structures largement polyvalentes, как сказано, в оригинале документа, что должно соответствовать, по-видимому, термину Бурбаки: structures multivalentes). Если система аксиом, определяющая структуру, такова, что любые две структуры, удовлетворяющие ей, изоморфны, то соответствующая структура называется *однозначной* (univalente). Примерами могут служить: структура целых чисел, структура действительных чисел, структура трехмерного евклидова пространства. В курсе средней школы ограничиваются рассмотрением структур такого рода. Если существуют, по крайней мере, две неизоморфные структуры, удовлетворяющие одной и той же системе аксиом, то соответствующие структуры называются *многозначными* (multivalentes). Примерами могут служить: группа, вполне упорядоченное множество, метрическое пространство и т. п. Соответствующие структуры до сих пор не входили в курс средней школы. Однако в настоящее время уже проводятся опыты по введению некоторых относящихся сюда понятий в среднюю школу. Такие опыты, например, ставятся в Хорватии (д-р Джуро Курепа и др.). Убедленным сторонником перестройки преподавания математики в средней школе является проф. Лондонского университета и секретарь Международной комиссии по изучению и улучшению математического образования Гаттеньо. В своей статье «Некоторые проблемы, которые ставит математическое образование» (в югославском журнале «Nastava Matematike i Fizike», V, Beograd, 1956) проф. Гаттеньо пишет: «Весь секрет в том, чтобы отправляться от общего для достижения частного, тогда как наши предшественники считали, что математическая поступь — это обобщение. В действительности, всё обстоит несколько иначе: многозначное предшествует однозначному...» и в другом месте: «Все мои эксперименты убеждали меня в истинности следующего открытия: наши учащиеся значительно ранее, чем мы думаем, могут изучать вопросы, которые мы начинаем только в университете и часто еще позже». Эти высказывания представляются парадоксальными и спорными. Тем легче

согласиться со статьей 14, предлагающей провести объективное исследование относящихся сюда вопросов.

Интересную программу для дальнейшей разработки методики преподавания математики можно усмотреть в разделе «Методы» данной рекомендации. В частности, правильным, с нашей точки зрения, являются подчеркивание значения личной активности учащихся, определение взаимоотношений между экспериментом и дедукцией, поощрение самостоятельных поисков учащихся, проявление внимания к ходу собственного математического мышления учащихся, поощрение индивидуальных способов выражения, выведение требований строгости и точности из реальных нужд устного или письменного обмена мыслей, ограничение роли заучивания, обучение учащегося самому ставить задачи, находить данные, использовать их и оценивать результаты, подчеркивание единства математики, изучаемой в виде отдельных дисциплин, и т. д.

Конечно, многое из указанного в данной рекомендации является хорошо знакомым и успешно реализуемым в советской школе. В частности, в отношении внеклассной и внешкольной работы (см. п. d статьи 23) наша школа имеет большой и успешный опыт. Но и здесь можно выделить вопрос, который не получил еще у нас разрешения. Речь идет о создании специального математического журнала (быть может, журнала более широкого — физико-математического и технического профиля), издающегося для учащихся средней школы — любителей математики, физики и техники.

## 2. РЕКОМЕНДАЦИЯ КОНФЕРЕНЦИИ МИНИСТЕРСТВАМ НАРОДНОГО ПРОСВЕЩЕНИЯ, ОТНОСЯЩАЯСЯ К ПРЕПОДАВАНИЮ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНИХ ШКОЛАХ

Международная конференция по народному образованию, созванная в Женеве Организацией Объединенных Наций по просвещению, науке и культуре и Международным бюро по просвещению и собравшаяся 9/VII 1956 г. на XIX сессию, приняла 17 июля 1956 г. следующую рекомендацию:

Конференция,

считая, что математика имела во все времена бесспорное культурное и практическое значение, играла важную роль в научном, техническом и экономическом развитии и, в частности, что наша эпоха создает невиданные ранее условия расцвета математики,

считая, что математическое образование есть благо, на которое имеет право каждое человеческое существо, каковы бы ни были его национальность, пол, положение и деятельность,

считая, что для обеспечения прогресса и благоденствия народов общее повышение математического уровня должно идти в ногу с техническим и научным расцветом,



считая, что различные цивилизации играют роль в создании и развитии математики,

считая, что психология установила, что практически каждое человеческое существо способно к определенной степени математической деятельности и, в особенности, что нет никаких оснований утверждать, что девочки менее способны к математике, чем мальчики,

считая, что математическая педагогика становится день ото дня всё более научной и действенной,

считая, что следует дать продолжение рекомендации № 31, касающейся начального математического образования в начальных школах, принятой XII международной конференцией по народному образованию,—

обращается к министерствам народного просвещения различных стран со следующей рекомендацией:

### Цели обучения математике

1. За время общего и продолжительного обучения в средней школе следует достигнуть в возможно большей мере воспитательных целей изучения математики, относящихся к интеллектуальной деятельности и формированию характера. Эти цели сводятся к процессам логического мышления (рассуждать, анализировать, абстрагировать, схематизировать, мыслить дедуктивно, обобщать, специализировать, применять, критиковать и т. п.), к рациональным качествам мысли и ее выражения (порядок, точность, ясность, сжатость и т. д.), к духу наблюдения, пространственным и количественным представлениям, к интуиции и воображению в абстрактной области, к развитию внимания и способности сосредоточиваться, к воспитанию настойчивости и привычки работать упорядоченно и, наконец, к формированию научного духа (объективность, интеллектуальная честность, вкус к исследованию и т. д.).

2. Операции практического порядка, приспособление к природным условиям и необходимость понимать проблемы, выдвигаемые технической, экономической и социальной жизнью, всё более и более требуют элементарных математических знаний (вычисления, практическая геометрия, геометрические представления, формулы, уравнения, функции, таблицы и графики). Эти основные понятия и средства также играют роль в возрастающем количестве профессий.

3. Математика и свойственный ей стиль мышления должны рассматриваться как существенный элемент общей культуры современного человека, даже если он не занимается деятельностью в области точных наук или техники; обучение математике, тесно связанное с обучением другим предметам, должно приводить учащихся к пониманию роли, которую математика играет в научной и философской концепции современного мира.

4. Одной из главных целей повышенного курса математики<sup>1)</sup> в последние годы обучения в средней школе должна быть подготовка к занятиям в высшей школе точными или инженерными науками, математическая основа которых растет изо дня в день.

Место, отводимое математическим предметам

5. Обучение математике, обязательное в различных классах младшего цикла средних школ, должно располагать соответствующим числом часов.

6. В старшем цикле научных отделений курс математики должен получать увеличенное число часов.

7. Желательно, чтобы учащиеся, обладающие специальными способностями для занятий точными науками, имели возможность следовать более развернутому обучению и чтобы они могли предаваться дополнительным индивидуальным занятиям.

8. В странах, где математическое обучение не является обязательным на некоторых отделениях (например, на литературном отделении), математическое обучение, имеющее более общекультурное, чем техническое направление, должно быть организовано, по крайней мере, в качестве факультативного.

9. В комплексной оценке каждого учащегося удельный вес, приписываемый успеваемости по математике, должен быть пропорционален значению, признаваемому за этой дисциплиной. Когда она является обязательной, например для научных отделений, она должна рассматриваться как одна из важнейших дисциплин, в особенности при переходе из класса в класс и выдаче аттестата в конце обучения.

### Программы

10. Программы по математике определенного отделения средней школы должны быть согласованы с общими целями обучения этой дисциплине и с частными задачами отделения.

11. Программы следует постоянно просматривать и приспособлять к развитию науки, потребностям техники и современной жизни, жертвуя устаревшими вопросами. Особенного внимания заслуживает тот факт,

<sup>1)</sup> В средних школах ряда зарубежных стран имеются так называемые *отделения*, дающие углубленную подготовку в определенной научной области, например отделения точных наук (называемые в этом документе сообразно с французской терминологией просто *научными отделениями*), литературные отделения и др. На научных отделениях ставится повышенный курс математики, о котором и идет речь в пп. 4 и 6. (Примечание переводчика.)

что для повышения уровня программ средней школы некоторые страны вводят аналитическую геометрию, исчисление бесконечно малых, статистику и вероятности, придают возрастающее значение изучению функций и векторов, так же как и приложениям математики.

12. Сложность и объем изучаемого материала должны соответствовать среднему умственному возрасту учащихся каждого класса, интересам и потребностям учащихся. Если желательно давать математически одаренным учащимся дополнительный материал, то необходимо заботиться о том, чтобы не вызвать расхолаживания менее одаренных учащихся, навязывая им вопросы, сложность которых превосходит их силы.

13. Желательно строить учебные планы так, чтобы обучение математике базировалось на функциональных началах, которые, устанавливая правильные соотношения между отдельными ветвями математики, выявляют общие понятия.

14. В этой связи желательно определить посредством педагогических экспериментов, реализуемых без предвзятого мнения, в какой степени многозначные структуры современной математики могут служить усовершенствованию среднего образования.

15. Желательно, чтобы учителя имели известную свободу инициативы в возможном расширении основных программ посредством факультативных дополнений.

#### Методы

16. В случаях, когда даются методические инструкции, следует придавать им форму советов и предложений, стремящихся сообразовать обучение как с успехами психологии познания и преподавания математики, так и с сущностью и приложениями самой математики — теоретической науки, происходящей из реального мира и имеющей эффективное значение для нашего воздействия на действительность.

17. Все усилия должны быть приложены к тому, чтобы побуждать и поощрять учащихся к активному изучению математики посредством насколько возможно широкого личного участия в разработке темы.

18. Необходимо:

- а) пробуждать и поддерживать интерес учащихся как к самой математике, так и к ее приложениям;
- б) проявлять внимание к течению математической мысли самих учащихся;
- в) приспособлять обучение к индивидуальным способностям и к эволюции мышления учащихся и постепенно дифференцировать его применительно к потребностям их будущей деятельности.

**19. Нужно:**

а) переходить к абстрактному, отправляясь от конкретного так часто, насколько это возможно, в особенности в младших классах, и каждый раз, когда это полезно, прибегать к фактическому, изображаемому или воображаемому экспериментированию, чтобы подготовить определение или доказательство;

б) принимать во внимание, что математическое познание возникает и развивается посредством интериоризации конкретной деятельности и построения операторных схем;

в) предпочитать вопросы, возникающие из конкретных ситуаций, не только для того, чтобы подчеркивать практическую полезность математики, но, что еще более существенно, чтобы мотивировать развитие теории.

**20. Важно:**

а) побуждать учащегося к собственным формулировкам идей и к открытию математических отношений и свойств раньше, чем ему будет внушена вполне завершенная зрелая мысль;

б) обеспечивать усвоение понятий и операторных процессов прежде введения формального обобщения;

в) переходить к автоматическим навыкам только по отношению к вполне усвоенным процессам.

**21. Существенно:**

а) производить сначала экспериментирование с математическими объектами и отношениями и затем вводить дедуктивное рассуждение;

б) постепенно расширять дедуктивное построение математики;

в) научить ставить задачи, находить данные, использовать их и оценивать результаты;

г) оказывать предпочтение эвристическому исследованию вопросов перед доктринальным изложением теорем;

д) ознакомить учащихся со структурой гипотетико-дедуктивной теории, где — на базе постулатов — теоремы строятся посредством доказательств и новые понятия вводятся посредством определений, подготовив их, таким образом, к дедуктивно-логическому изложению математики.

**22. Нужно:**

а) изучать ошибки учащихся и видеть в них средство познания процесса их математического мышления;

б) упражнять в практике самоконтроля и исправления собственных ошибок;

в) раскрыть перед учащимися смысл понятий приближения, порядка величины и правдоподобия результатов;

г) отдавать предпочтение размышлению и рассуждению перед «на-таскиванием» и заучиванием наизусть и ограничивать роль памяти закреплением фундаментальных результатов;

е) предлагать экзаменационные вопросы, которые в большей мере требуют математического развития, чем интенсивной подготовки.

**23. Важно:**

а) поощрять индивидуальные способы выражения, хотя бы приближенные, и постепенно улучшать их;

б) приводить учащегося к точности и строгости посредством выяснения требований к фактическому объяснению с другими лицами и требований ясности собственной мысли;

с) поощрять как индивидуальное исследование и инициативу, так и работу группой;

д) содействовать возрастанию числа учащихся, интересующихся математикой, и способствовать развитию их способностей и знаний, организуя кружки, лекции, соревнования и другие мероприятия факультативного характера и распространяя доступные для учащихся книги и журналы.

**24. Существенно:**

а) подчеркивать внутреннее единство математики, не устраивать перегородок между ее ветвями и сопоставлять различные методы решения данного вопроса;

б) указывать главные этапы истории изучаемых математических понятий и теорий.

**25. Необходимо:**

а) поддерживать координацию математики с предметами, использующими ее;

б) использовать развитие математической мысли для повышения точности, ясности и сжатости языка;

с) следить за сохранением контакта математики с жизнью и действительностью.

### Учебные материалы

**26.** Развитие методики математики влечет за собой соответствующие изменения в учебниках. Помимо начальных книг по математике, позволяющих постепенно усваивать абстрактные понятия, ученик должен располагать книгами для углубленного повторения, где пройденные вопросы повторяются и систематизируются на более высоком уровне. Литература справочного, дополнительного и популярного характера, журналы и т. д. должны предоставляться в распоряжение каждого в классных библиотеках. Эта литература должна быть приспособлена к целям различных отделений и в ней должны быть представлены в надлежащей степени практическая точка зрения, технические приложения, теоретические построения и общекультурная сторона дела.

**27.** Наглядные средства, конкретные математические модели (заимствованные из повседневной обстановки, построенные учащимися или

учителями или, наконец, изготовленные промышленными предприятиями), занимают всё большее место в обучении; из их употребления следует извлекать средства к тому, чтобы учащиеся действительно овладевали математическими абстракциями.

### Обучающий персонал

28. В математике, быть может, больше, чем в какой-нибудь другой дисциплине, роль учителя является первостепенной. Набор, обучение и усовершенствование учителей математики должны быть предметом особого внимания и заботы со стороны властей, отвечающих за воспитание молодежи.

29. Учителя, на которых возложено обучение математике в средних школах, должны иметь математическое образование существенно более высокого уровня, чем тот, на котором они будут преподавать. Это образование должно включать не только изучение теоретической математики, но и часть прикладной математики, общую историю математической мысли, методологию самой математической науки и изучение элементарной математики, рассматриваемой с высшей точки зрения.

30. Соответствующая педагогическая и психологическая подготовка должна быть необходимым дополнением к математическому образованию учителя и включать достаточно ясное и зрелое знание общих целей и принципов воспитания человека. В этой подготовке должны выделяться вопросы структурного развития интеллекта в связи с выработкой математической мысли. Эта подготовка должна останавливаться на отношениях конкретного и абстрактного так, чтобы включить методику использования моделей в математическом обучении. Будущий преподаватель должен быть подготовлен к наблюдению и к экспериментированию в области преподавания математики. Более всего он должен интересоваться молодежью и ее стремлениями с целью стать вдохновителем и наставником юности.

31. Следует заботиться о том, чтобы все учащиеся младших классов и менее одаренные учащиеся старших классов имели хороших учителей.

32. Нужно, чтобы преподаватель математики, исполняя свои обязанности, мог находиться в курсе современного развития теоретической математической науки, ее важных актуальных приложений и новейших успехов дидактики своего предмета. Желательно, чтобы принимались меры в целях облегчения усовершенствования учителей (лекции, курсы в каникулярное время, семинары, рабочие группы, стажировка, издание литературы и т. п.).

33. Рекомендации специализированных инспекторов и педагогических консультантов, пример работы педагогов-экспериментаторов являются превосходными средствами для повышения эффективности преподавания.

34. Преподаватель математики должен пользоваться в современном обществе уважением и положением, на которое ему дают право научное образование и миссия воспитателя.

35. Исходя из того, что во всех странах надлежащее обучение математике является существенным элементом воспитания, важно обеспечивать набор достаточного числа квалифицированных учителей, тем более, что это представляет одно из условий научного, технического, экономического и социального расцвета всех народов.

### Интернациональное сотрудничество

36. Правительства и международные культурные или просвещенские организации, такие, как ЮНЕСКО, Международное бюро по просвещению, Международная комиссия по математическому образованию, Международная комиссия по изучению и усовершенствованию математического образования, должны содействовать всеми средствами (публикации, лекции, встречи, выставки, поездки с целью изучения и стажировки за границей и т. д.) международному обмену идей, работ, исследований и результатов, полученных в математическом обучении, чтобы молодежь всего мира могла возможно ранее воспользоваться результатами опыта и достижениями учителей всех стран.

*(Перевод с французского А. И. Маркушевича)*

## 3. ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНИХ ШКОЛАХ

*В. Сервэ*

W. Servais, Бельгия. (Доклад на конференции)

В качестве докладчика я считаю своим долгом поблагодарить все организации и лица, которые разработали, собрали и сравнили всю документацию, представленную различными странами.

Министерства национального просвещения, народного образования и культуры проявили величайшую заботу о том, чтобы дать представление о современном состоянии преподавания математики. Содержательные доклады, сжатые и ясные, составляют первостепенную основу работы. Их изучение и сопоставление дадут новую пищу для наших размышлений о преподавании математики. Они позволят выделить общие основы этого преподавания, пути и средства для его улучшения и наиболее полезные советы соответствующим органам управления.

Вся эта деятельность на пользу преподавания стала возможной благодаря публикации № 171 ЮНЕСКО и БИЕ<sup>1)</sup>.

Среди членов исследовательского отдела международного бюро образования БИЕ я особо выделяю госпожу Велюз Пагано; ей мы обязаны общим обзором, в котором она с большим знанием сравнила данные различных стран. Она, таким образом, содействовала успеху настоящей конференции.

Конференция призвана высказаться — в форме рекомендации министерствам народного образования — о желательных способах решения различных задач, поставленных преподаванием математики в средней школе.

Для того чтобы редакционный комитет, который вам предстоит избрать, мог выполнить свою работу со знанием дела, вы поручили мне дать введение к общей дискуссии, из которой должны выявиться основные руководящие идеи этой рекомендации.

Нам следует при этом не увязнуть в случайностях и частных подробностях отдельных национальных проблем, а наоборот, сосредоточить свои усилия на упрощении и синтезе.

Повестка дня (документ ЮНЕСКО — БИЕ 375, пункт II, стр. 5) предлагает вашему вниманию шесть главных вопросов, которые смогут стать предметом дискуссии. Речь, следовательно, будет идти о том, чтобы обрисовать место, которое должно быть предоставлено преподаванию математики; определить цели, какие, по-вашему, надо теперь ставить перед ним; выявить принципы, которыми мы должны вдохновляться при выработке программ; уточнить указания относительно методов и о роли учебных пособий и, наконец, исследовать вопрос о подготовке и усовершенствовании преподавательских кадров.

Чтобы изыскать «то, что должно быть», конференции необходимо сначала уяснить себе «то, что есть», т. е. условия, которые существуют сегодня в средних школах различных стран. Это фактическое положение изложено в книге, предоставленной в распоряжение каждого из вас в качестве рабочего документа. Чтобы изыскать «то, что должно быть», особенно необходимо предвидеть, каковы будут завтра математические потребности нашей эпохи.

Мы сознаем все, что находимся сейчас, говоря языком экономистов, в высокой математической конъюнктуре, никогда до сих пор не достигавшейся. Больше, чем когда-либо, математика является одновременно культурой в лоне культуры и техникой в сердце техники. Она представляет собой культурную ценность сама по себе, идеал формальной красоты, заложенной в произведениях искусства — в том, что в них содержится наиболее классического. Этот идеал выражается словами: *мера*,

<sup>1)</sup> Имеются в виду изданные материалы министерств просвещения 62 различных государств, кратко характеризующие преподавание математики в этих государствах: «L'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires», Paris — Genève, 1956. (Примечание редакции.)



*порядок, отношение, пропорция*, являющимися математическими терминами. Математика — это школа, в которой обучаются логике на практике на каждом шагу: точно установить понятие с помощью определения; образовать и выразить суждение; проследить и проверить рассуждение, составить его, сформулировать и разобрать; поставить проблему, найти ее решение, обосновать его, рассмотрев исчерпывающим образом все возможные случаи.

Математика, даже элементарная, показывает на примере геометрии структуру дедуктивной теории, в которой на основе допущенных постулатов строятся теоремы с помощью доказательств, а термины объясняются при помощи определений.

Теоретико-познавательное воззрение платоников на математику состоит в том, что они видят в ней созерцание абстрактных вещей, существующих сами по себе в мире идей. Релятивистское воззрение, более современное, рассматривает математику как организованную систему отношений между элементами, где сами отношения известны только теми явно заданными операторными свойствами, которым эти отношения должны удовлетворять. Обе эти концепции имеют в виду математику в стадии законченной абстракции, которая может проявиться лишь в последние годы в старших классах средней школы. Преподавание, если оно хочет быть эффективным, не может удовлетвориться абстракцией статической как совершенно законченной. Оно должно следовать диалектическим путем абстракции как динамического процесса. Как раз здесь, несомненно, уместны будут генетическая концепция математики и исследование проблемы ее преподавания в связи с историческим развитием математики и, особенно, с психологией математического развития в детском, юношеском и зрелом возрасте.

Математика является меньше знанием, чем умением. Вот почему она может развить свойства ума и характера, связанные с навыками к абстракции, к строгой, целеустремленной дисциплине, к выражению на различных языках (языке общения, фигур, формул и графиков), со схематической мыслью, сжатой и четкой.

С выдающейся культурной ценностью математики может сравниться лишь ценность ее как орудия нашего воздействия на реальный мир.

Если не всякий человек, конечно, может достигнуть достаточно высокой математической культуры, то всякий, даже первобытный человек нуждается в практической математике. С тех пор, как геометрия развилась из измерения земельных участков, математика самым тесным образом сплелась с развитием наук. В качестве системы форм-представления она непрестанно содействовала овладению реальным миром. В наши дни новые ветви математики, теория вероятности, статистика представляют более гибкие формы для описания законов, с помощью которых растут наше понимание реального мира и наше воздействие на него. Математические модели волновой механики являются инструментом наших представлений и предвидений в атомной области. Вслед за естественными науками математизируются и науки гуманитарные.

В настоящее время всё более и более плодотворные исследования развивают математику как в конкретном плане, так и в порядке абстрактном. Изобретение вычислительных и рассуждающих машин в той же мере, как и открытие фундаментальных структур, лежащих в основе современной математики, открывает обширное поле для математической деятельности и бросает новый свет на ее природу.

Эти общие соображения хорошо известны. Я напомнил о них лишь для того, чтобы мы могли осознать, в какой мере незнание и непонимание математического языка становятся новой помехой. Никогда проблема лучшего преподавания математики не приобретала, как сейчас, характер столь всеобщий, столь необходимый, столь неотложный.

Все страны поняли, что активное знание математики не является лишь украшением национальной культуры; оно составляет условие экономического существования и элемент безопасности.

### Место математики

Данные анкеты показывают, что математика занимает весьма значительное место на всех ступенях среднего образования: она обязательна за редким исключением; в большинстве стран число недельных часов, отведенных математике в неспециализированных отделениях, колеблется от 4 до 6; 3 часа в неделю представляет более редкий случай, а 2 и менее — лишь исключение. Это составляет от 9 до 20% всех классных часов.

В специализированных научных отделениях старшего цикла средней школы число часов колеблется от 6 до 10 в неделю, а в некоторых странах достигает 12. Это составляет от 20 до 40% всего количества часов.

Однако в демократической заботе о том, чтобы дать каждому учащемуся образование, соответствующее его возможностям, и извлечь из склонности юношества к математике большую пользу для общества, можно спросить себя: не желательно ли найти более гибкие формы преподавания? Прежде всего, молодежь, обнаружившая способности и заметный вкус к научным занятиям вообще и к математике в частности, должна бы иметь возможность пользоваться более глубоким образованием, чем это требуется обычными программами. Было бы подходящим для лучшего развития их способностей представить им дополнительное преподавание либо путем дополнительного факультативного курса, либо путем индивидуального преподавания, оставляющего большее поле для самостоятельных исследований. Возможность повысить математический потенциал более способных позволила бы подумать о менее требовательном преподавании для учеников, менее способных к математике. Зачем обескураживать их и заставлять испытывать отвращение к дисциплине, требования которой превосходят их способности? Зачем превращать математику в школьный барьер и лишаться людей, способных

принести пользу, в то время как целесообразнее преподавать им математику в меньших дозах?

Я хочу, чтобы меня хорошо поняли: вопрос идет отнюдь не о том, чтобы приблизить общее преподавание математики к уровню посредственности. Дело идет о том, чтобы поднять уровень обучения лучших, смягчая обучение слабых. Для последних лучше скромная математика, хорошо усвоенная, чем недоступная математика, которую ненавидят, что хуже, чем полное отсутствие математики.

В некоторых странах ученики старших отделений с литературной специализацией совсем не проходят математики. Не является ли более желательным предоставить этим учащимся факультативное обучение с общекультурным направлением, имеющее своей целью больше содействовать их интеллектуальному развитию, чем давать им определенные фактические сведения?

В итоге речь идет о том, чтобы найти формы преподавания математики более разнообразные, лучше приспособленные и гуманные, менее жесткие в смысле объема требований. Они давали бы каждой стране избранных математиков, в которых она нуждается, а также и массу граждан, достаточно натренированных в обычной математической технике. Они, мы надеемся, устранили бы одну из главных причин неудач математического образования, о которых отчеты не говорят: страх перед математикой. Тот страх, который слишком глушит молодежь, вызывает интеллектуальное торможение и заставляет заранее примириться с неудачей.

Надо ясно сказать с этой трибуны: математика является предметом, наиболее устрашающим учеников и их семьи, предметом, у которого больше всего неудач и который часто оказывается первой причиной школьных неполадок.

### Цели

Цели преподавания математики многообразны. Они соответствуют различным аспектам самой математики, личным свойствам, которые развивает изучение ее дисциплин и ее практическое применение.

Если учесть, что ответы, данные по этому поводу 62 странами, составляют как бы референдум, то мы должны признать, что преобладающее значение уделяется утилитарному аспекту и роли математики в логическом развитии.

Утилитарные цели суть двоякого рода: наиболее непосредственной является практическая повседневная потребность каждого человека в необходимых знаниях математики, относящихся к вычислению, геометрическим представлениям, формулам, функциям, графикам. Эти основные понятия встречаются во всё возрастающем числе профессий. Они необходимы для понимания окружающей природы, а также вопросов экономических и общественных. Далее, одной из главных целей преподавания математики в средней школе является подготовка к после-

дующему изучению научных и технических дисциплин, в которых роль математики непрестанно возрастает.

Воспитательные и культурные цели объединяются в несколько категорий, относящихся к интеллектуальным качествам, формированию характера и общей культуре.

Среди интеллектуальных свойств, развиваемых математикой, наиболее часто упоминаются те, которые относятся к логическому мышлению: дедуктивное рассуждение, способность к абстрагированию, обобщению, специализации, способность мыслить, анализировать, критиковать. Упражнение в математике содействует приобретению рациональных качеств мысли и ее выражения: порядок, точность, ясность, сжатость. Оно требует воображения и интуиции. Оно дает чутье объективности, интеллектуальную честность, вкус к исследованию и тем самым содействует образованию научного ума.

Изучение математики требует постоянного напряжения внимания, способности сосредоточиться; оно требует настойчивости и закрепляет хорошие навыки работы.

Таким образом, математика выполняет важную роль как в развитии интеллекта, так и в формировании характера.

Эти суждения выражены в разной форме в большинстве ответов. Они ставят перед психологом задачу перенесения этих приобретений на другие сферы деятельности.

К воспитательным достоинствам математики, относительно которых все согласны, прибавляется еще один вклад ее в общую культуру, более специфический, который — удивительная вещь — упоминается во многих ответах: я имею в виду математическую мысль как таковую. То, что целью преподавания математики является приобретение стиля мышления особого рода, является, быть может, для всех само собой разумеющимся и не нуждающимся в явной формулировке.

В общем, при преподавании математики в средней школе во многих странах сохраняется забота об общем образовании. Однако под давлением непосредственных нужд текущей жизни и требований высшего образования всё большее место уделяется прагматическим целям.

Та отвлеченная культура, которая долгое время была идеалом обучения в средней школе, должна, следовательно, сочетаться с реальной потребностью в образовании, полезном более непосредственно. У тех, кто сохраняет привязанность к традиции, это вызовет, несомненно, сожаление; те, кто обращены к будущему, с доверием ожидают прихода более живой культуры.

Несмотря на различие во мнениях, объективное исследование фактов приведет нас к согласию в целях, которые должно ставить преподавание математики, как это было и в прошлые годы, когда речь шла о других дисциплинах.

Несомненно, мы добьемся того, чтобы сформулировать эти цели либо в форме соображений, либо прямо в рекомендации.

## Программы

Цели, поставленные преподаванию математики, определяют объем и содержание программ. Они приведены в ответах министерств в более или менее сжатой форме.

Общее сопоставление учебного материала в различных странах было бы весьма полезным, но потребовало бы много времени. Более того, так как дискуссии по программам часто бывают весьма страстными, это могло бы отклонить конференцию от ее цели, которой является обзор основных задач, поставленных преподаванием математики.

Мы предполагаем, что нашей задачей здесь является не столько определение объема программ, сколько исследование направлений их современной эволюции. Изменения, которые внесены в новейшее время и предположено внести в программы примерно в половине стран, представленных на настоящей конференции, указывают на заботу о том, чтобы сообразовать преподавание с реальными потребностями учеников и их умственным уровнем, а также учесть нужды научных исследований и различных отраслей технической деятельности.

Наконец, со стороны собственно содержания математики происходят изменения, целью которых является повышение уровня программ: введение исчисления бесконечно малых, аналитической геометрии, статистики; придание возрастающей важности изучению функций, векторов, исчислению вероятностей, дифференциальному и интегральному исчислению, а также прикладной математике. Все изменения, внесенные в программы, сводятся, следовательно, к увеличению места, уделяемого исчислениям в формах весьма общего значения.

В какой мере более абстрактные математические структуры и, следовательно, в широкой мере многозначные, открытые в недрах классической математики и развитые современными математиками во всем мире, могут благоприятно повлиять на преподавание математики в средней школе? Это — совершенно новый вопрос, на который исследователи ищут ответ во многих странах.

Оставаясь в рамках, соответствующих плану нашей конференции, мы можем спросить себя: как приспособить содержание программ к воспитательным, культурным и практическим целям, изложенным выше?

Следует ли сделать их более гибкими, чтобы предоставить больший простор преподавателям, а учащимся больше возможностей? В какой мере желательно видоизменить программы в зависимости от нынешнего развития наук и сообразуясь с эволюцией современной математики?

Таковы вопросы, по которым полезно будет услышать ваше мнение в ходе общей дискуссии.

## Методы

Что касается методов, то данные, которыми мы располагаем, показывают, что больше чем в половине стран органы народного образования обращаются к учителям средних школ с инструкциями, стремясь

собразовать преподавание с определенными педагогическими и психологическими принципами. Чаще всего эти инструкции не носят обязательного характера. Они представляют, скорее, советы или указания, которые учитель волен принять или нет, но которыми, предполагается, он воспользуется, учитывая особые условия и уровень класса. В общем, педагогические инструкции имеют в виду возбудить у ученика активное участие и исправить ту тенденцию к лекционному преподаванию, в которой вообще можно бы упрекнуть преподавание в средней школе.

Конференция сочтет, несомненно, полезным сформулировать методические рекомендации, которые, оставаясь достаточно общими, чтобы позволить приспособление к местным и индивидуальным условиям, уявили бы требования воспитательные с требованиями специализации.

Быть может, следует поддержать некоторые инструкции, которые довольно часто встречались в ответах министерств:

а) возбуждать и поддерживать интерес учеников; приспособлять преподавание к их индивидуальным способностям;

б) исходить из конкретного, чтобы прийти к абстрактному, особенно в низших классах, обращаться к интуиции и эксперименту, в частности, при преподавании геометрии; подводить ученика к самостоятельному открытию свойств; затем, постепенно, на базе приобретенного математического опыта приводить его к дедуктивному рассуждению;

с) показывать пользу преподаваемого на частых практических упражнениях: измерение, межевание, изготовление учебных пособий;

д) обеспечить понимание терминов раньше, чем вводить их формально; отдавать предпочтение размышлению и рассуждению перед мнемоническими правилами; допускать механическое выполнение операций только тогда, когда они усвоены;

е) поощрять исследование и самостоятельную формулировку;

ф) выявлять связь математики не только с науками, пользующимися ею, но и с рациональной стороной обыденной речи; указывать на важные этапы в историческом построении математики.

Коротко — сделать всё для того, чтобы содействовать и поощрять у ученика активное обучение математике.

В отношении включения среднего образования в систему общего образования — усовершенствовать увязку программ и особенно методов с начальным и высшим образованием.

Эволюция методики математики вызывает надлежащее видоизменение учебников. Наряду с математическими руководствами, которые должны содействовать успешному усвоению абстрактных понятий, учащийся должен располагать книгами для повторения, в которых приобретенный материал снова проходит и располагается в более высоком плане. Справочный и дополнительный материал послужит пособием для индивидуального и более самостоятельного изучения.

Книги с буквенными формулами и плоскими фигурами долгое время были единственным учебным пособием. Теперь математическая педагогика расширила запас своих средств введением моделей, использующих

самые различные отрасли техники. Это новшество иногда плохо принималось, ибо плохо понималось любителями традиционной педагогики. С их точки зрения вторжение того, что они считают пустяками, может поставить под угрозу преподавание математики, заменяя абстрактные доказательства доказательствами сенсомоторными. Сторонники так называемых интуитивных методов видят в употреблении моделей не приковывание к конкретному, а средство к успешному и активному абстрагированию, опирающемуся последовательно на интуицию в трех различных основных ее значениях: чувственную интуицию конкретного, умственную интуицию представлений и математическую интуицию, являющуюся непосредственным постижением самого строения соотношений и операций.

Как бы то ни было, знаменателен тот факт, что страны, желавшие показать на постоянной выставке современное состояние у них преподавания математики, все представили модели.

### Подготовка учителей

Последним вопросом, который нам предстоит разобрать, является вопрос об учителе. Это, без сомнения, наиболее важный вопрос.

Если определение целей, если выработка программ и выбор методов имеют большое значение, то эффективность преподавания и продуктивность метода, бесспорно, зависят в конечном счете от учителя.

В математике роль учителя первостепенна. Сколько людей, пристрастившихся к математике, могут подтвердить, что этим увлечением они обязаны хорошему преподавателю! Сколько людей, для которых математика является запретной областью, сохранили недобрую память о тех, кто внушил им отвращение к ней и обескуражил их!

Говорят также, что хороший преподаватель математики — редкость. И в самом деле, для того чтобы быть хорошим учителем математики в средней школе, недостаточно быть специалистом, имеющим углубленные познания в преподаваемых предметах. Он может быть очень тонким и сведущим педагогом. Но педагогическая жилка столь же необходима, как и специальность математика, и должна быть заложена в нем.

Анкета, проведенная БИЕ, показывает, что эта двусторонняя подготовка преподавателя математики требуется примерно в трех четвертях стран, представивших сведения. Если эта мера, необходимость которой признана, не стала еще всеобщей, то это потому, что она наталкивается на материальные трудности.

Средства для их облегчения могли бы сделаться предметом одного из пунктов рекомендаций конференции.

Из анкеты следует также, что почти всюду делаются усилия, чтобы предоставить работающим преподавателям возможность усовершенствовать свое профессиональное образование.

Почти все ответы упоминают курсы, семинары, конференции, публикации и т. п. Но эти сведения не позволяют установить процент

учителей, пользующихся этими возможностями. Однако создается убеждение, что страны всё более и более оставляют доктринерскую математическую педагогику, считающую себя неприкосновенной, в пользу новой педагогики, которая старается сохранить и передать приобретенные результаты, но одновременно обогатиться плодами трудов психологов познания, а также новым опытом, приобретаемым учителями среди своих учеников.

В процессе преподавания математики учитель должен иногда забывать законченное знание, которое он хотел бы дать или привить, и следовать тропой юношеской мысли, узнавая таким образом то, чему обучаются его ученики.

Изучение путей, следуя которым дети или юноши активно создают свою математику, приведет к основным началам педагогики.

Большого внимания заслуживает последний пункт: кризис в укомплектовании преподавателей математики, отмеченный почти половиной стран. Его следует приписать главным образом тому притяжению, которое оказывают на окончивших университет более оплачиваемые должности, предлагаемые промышленностью. Математические кадры, которые будут отвлечены от преподавания в ближайшие годы, несомненно, еще более увеличатся благодаря росту контингента лиц, занятых математическими исследованиями, и благодаря потребности в обслуживающем персонале для вычислительных машин.

Страны, которые не приняли бы соответствующих мер для обеспечения себя кадрами преподавателей математики, достаточными для обучения возрастающих масс учеников, очутились бы в затруднительном, если не в бедственном положении. Одна из обязанностей конференции — забыть тревогу и обратить внимание властей на неотложную необходимость своевременно подготовить необходимые кадры преподавателей математики.

Язык математики интернационален! Надо, чтобы те, на кого возложена миссия преподавать ее в своей стране, объединили здесь усилия, чтобы сопоставить свои наблюдения, результаты своих исследований и своих методов, чтобы обменяться опытом и публикациями.

Математика находится на большом научном подъеме.

Больше, чем когда-либо, нуждается в ней наше общество с его техникой! Больше, чем когда-либо, мы должны коллективным усилием улучшить ее преподавание!

*(Перевод с французского М. З. Кайнера)*

---



В КОМИТЕТЕ ПО ЛЕНИНСКИМ ПРЕМИЯМ  
В ОБЛАСТИ НАУКИ И ТЕХНИКИ  
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

**О ПРИСУЖДЕНИИ ЛЕНИНСКИХ ПРЕМИЙ  
ЗА НАИБОЛЕЕ ВЫДАЮЩИЕСЯ РАБОТЫ  
В ОБЛАСТИ НАУКИ И ТЕХНИКИ**

Комитет по Ленинским премиям в области науки и техники **постановил:**

Присудить Ленинскую премию 1957 года Новикову Петру Сергеевичу, члену-корреспонденту Академии наук СССР — за научный труд «Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп», опубликованный в 1955 году.

**О РАБОТЕ П. С. НОВИКОВА  
«ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ НЕРАЗРЕШИМОСТИ  
ПРОБЛЕМЫ ТОЖДЕСТВА СЛОВ В ТЕОРИИ ГРУПП»**

Одним из центральных вопросов математической логики является вопрос о разрешимости так называемых алгоритмических проблем.

Примером алгоритма (понятие, встречающееся в математике со времен Евклида) может служить процесс деления одного числа на другое. Алгоритм характеризуется возможностью в конечном числе шагов получить результат (в нашем примере — частное и остаток), действуя по определенным правилам, независимым от исходных данных (в нашем случае — делимое и делитель); строгая теория алгоритмов развита в последние годы работами А. А. Маркова, Е. Поста, А. М. Тьюринга и других.

Алгоритмическая проблема заключается в разыскании алгоритма, позволяющего единым методом решить некоторую бесконечную серию однородных вопросов или в доказательстве отсутствия такого алгоритма.

Выдающиеся достижения в этом направлении имеет П. С. Новиков, доказавший неразрешимость основных алгоритмических проблем теории групп.

Всякая группа [множество элементов, в котором определена одна операция, удовлетворяющая известным требованиям — например, ассоциативности  $(ab)c = a(bc)$ ] может быть задана с помощью образующих элементов и определяющих соотношений следующим образом. Выписывается система образующих элементов — некоторых символов или «букв»  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , которые вместе с символами — «буквами»  $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}$  образуют «алфавит» группы. Произвольная последовательность букв, взятых из алфавита данной группы, называется словом; условия равенства некоторых слов (вида  $A_j = B_j$ ) вместе с обязательными условиями  $a_i a_i^{-1} = a_i^{-1} a_i = 1$  образуют определяющие соотношения. Два слова  $X$  и  $Y$  группы называются равными в том и только в том случае, если одно из

## О ДЛИНЕ КРИВОЙ

Е. М. Ландис

(Москва)

Известно, что понятие длины кривой требует специального определения и что это определение может быть дано многими способами. Здесь мы хотим познакомить читателя с одним определением, мало известным широкому кругу математиков, так как оно опирается на идеи А. Н. Колмогорова, изложенные им для гораздо более общего случая (произвольное так называемое  $A$ -множество в  $n$ -мерном пространстве) в журнальной статье, предназначенной для специалистов<sup>1)</sup>. Между тем это определение близко к нашему интуитивному представлению о длине. С нашей точки зрения оно ближе к нему, чем классическое определение, использующее вписанные ломаные (заметим, что речь здесь идет лишь о методологической стороне вопроса, так как — это будет показано ниже — оба определения эквивалентны), и, что особенно существенно, с помощью этого определения легко показать, что ввести длину можно единственным способом, если только мы хотим удовлетворить некоторым естественным требованиям.

Материал, излагаемый в настоящей статье, как показал опыт, вполне доступен школьникам — ученикам старших классов, проявляющим интерес к математике: основное содержание статьи составило предмет лекции, предназначенной для учеников 9-х и 10-х классов<sup>2)</sup>. Более того, нам кажется, что руководящая идея такого изложения понятия длины могла бы быть обработана и для школьного преподавания.

Мы будем рассматривать кривые на плоскости. Для простоты изложения мы ограничимся *простыми дугами* — взаимно однозначными и взаимно непрерывными образами отрезка.

Точное определение рассматриваемого класса кривых есть, может быть, наиболее трудное для школьников место. Мы предлагаем изложить его, например, так.

---

<sup>1)</sup> А. Н. Kolmogorov, Beiträge zur Masstheorie, Mathem. Annalen 107, 1932, стр. 351—366.

<sup>2)</sup> Прочитана автором в МГУ 11 ноября 1956 г.

Первоначально мы представляем себе кривую как след, оставляемый остро отточенным карандашом, который мы, не отрывая, ведем по бумаге. Дадим определение, исходя из этого представления. Пусть кривая была начерчена в течение времени от момента  $t_1$  до  $t_2$ . Пусть в момент времени  $t_1$  карандаш находился в точке  $A$  плоскости и в момент времени  $t_2$  — в точке  $B$ . Пусть в момент времени  $t$  (где  $t_1 < t < t_2$ ) карандаш находился в точке  $P(t)$ .

Будем для простоты рассматривать кривые без самопересечений. Это значит, что если при некотором  $t$  мы попали в точку  $P(t)$ , то ни при каком другом значении  $t'$  времени мы в эту же точку не попадем, т. е.  $P(t) \neq P(t')$  при  $t \neq t'$ .

Карандаш не может мгновенно перескочить из одной точки в другую. Если он находится в момент времени  $t$  в точке  $P(t)$ , то еще некоторое (пусть очень малое) время он будет находиться вблизи точки  $P(t)$ . Точно это можно сформулировать так: какое бы мы ни взяли положительное число  $\epsilon$ , найдется такое положительное число  $\delta$ , что при  $|t - t'| < \delta$  расстояние<sup>1)</sup> между точкой  $P(t')$ , в которой карандаш находится в момент времени  $t'$ , и точкой  $P(t)$  меньше  $\epsilon$ .

Таким образом, полученное нами определение выглядит так:

*Множество  $S$  точек на плоскости называется кривой (простой дугой), если найдется на числовой оси  $t$  такой отрезок  $[t_1, t_2]$ ,  $t_1 < t_2$ , что каждой точке  $t$  этого отрезка можно поставить в соответствие точку  $P(t)$  множества  $S$  так, что:*

- 1) каждая точка множества  $S$  поставлена в соответствие некоторой точке отрезка  $[t_1, t_2]$ ;
- 2)  $P(t') \neq P(t'')$  при  $t' \neq t''$ ;
- 3) какую бы точку  $t$  отрезка  $[t_1, t_2]$  мы ни взяли и какое бы число  $\epsilon > 0$  мы ни задали, найдется такое число  $\delta > 0$ , что для любой точки  $t'$  отрезка  $[t_1, t_2]$ , для которой выполняется неравенство

$$|t' - t| < \delta,$$

соответствующая ей точка  $P(t')$  на плоскости отстоит от точки  $P(t)$  на расстояние, меньшее  $\epsilon$ .

Заметим, что точки одной и той же кривой  $S$  могут быть поставлены в соответствие точкам различных отрезков оси  $t$ ; кроме того, они могут быть поставлены в соответствие точкам одного и того же отрезка многими различными способами. В определении требуется, чтобы нашелся хотя бы один такой отрезок и хотя бы один способ установления соответствия.

Пусть имеется кривая  $S$ . Это значит, что существует отрезок  $[t_1, t_2]$  такой, что каждой его точке  $t$  поставлена в соответствие точка  $P(t)$  кривой  $S$  так, что выполнены условия 1), 2), 3). Точки  $P(t_1)$  и  $P(t_2)$  мы будем называть концами кривой  $S$ . Обозначим  $P(t_1)$  через  $A$ , а  $P(t_2)$  — через  $B$ .

Относительно точек  $P(t')$  и  $P(t'')$  кривой  $S$  будем говорить, что точка  $P(t')$  расположена ближе к  $A$  по кривой (дальше от  $B$  по кривой), чем  $P(t'')$ , если  $t' < t''$ .

Концы кривой и порядок расположения точек на кривой не зависят ни от того, какой отрезок оси  $t$  был выбран, ни от того, каким способом было установлено соответствие, обладающее свойствами 1), 2), 3), между точками отрезка и точками кривой. Точного доказательства этого факта мы приводить не будем. Наглядный же его смысл состоит в следующем: пусть на бумаге начерчена кривая (незамкнутая и без самопересечений) непрерывным движением карандаша. Тогда нельзя эту же кривую начертить, не отрывая карандаш от бумаги, если начать с середины и потребовать, чтобы ни через одну точку карандаш не проходил дважды.

<sup>1)</sup> Мы считаем, что для измерения расстояний на плоскости раз навсегда выбран какой-то масштаб.

Нам для дальнейшего понадобятся понятия верхней и нижней грани множеств чисел.

Пусть имеется некоторое множество чисел. Число  $M$  называется верхней гранью этого множества, если:

- 1) все числа множества меньше, либо равны  $M$ ;
- 2) либо число  $M$  само принадлежит нашему множеству, либо существуют числа из нашего множества, как угодно мало от него отличающиеся.

Например, если множество состоит из конечного числа чисел, то верхней гранью будет самое большое число из этого множества. Множество чисел

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$$

имеет верхней гранью единицу.

Аналогично определяется нижняя грань множества чисел: нижней гранью множества чисел называется такое число  $N$ , что:

- 1) все числа множества больше, либо равны  $N$ ;
- 2) либо  $N$  принадлежит множеству, либо существуют в множестве числа, как угодно мало отличающиеся от  $N$ .

Имеет место следующая теорема:

**Теорема I.**

1) Если все числа, входящие в множество, меньше некоторого числа  $A$ , то это множество имеет верхнюю грань.

2) Если все числа, входящие в множество, больше некоторого числа  $B$ , то это множество имеет нижнюю грань<sup>1)</sup>.

Если числа изобразить точками на числовой оси, то теорему можно проиллюстрировать рисунками 1 и 2.



Рис. 1.

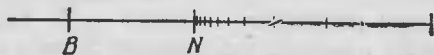


Рис. 2.

Доказательства этой теоремы, которые можно найти во всяком серьезном курсе математического анализа или теории множеств, мы не приводим.

Теперь мы можем уже приступить к определению длины кривой.

Вспользуемся следующим наводящим соображением. Пусть на плоскости лежит кривая  $S$ . Если бы эта кривая была ниткой, лежащей на столе, то ее можно было бы измерить так: взять нитку за концы, потянуть, пока нитка не распрямится, и приложить ее к линейке.

<sup>1)</sup> Предполагается, что множество содержит хотя бы одно число.

Если теперь на плоскости задана произвольная кривая, то нетрудно сообразить, как здесь следует понимать выражение «приложить ее к линейке». Надо взять «линейку» — отрезок. «Приложить кривую  $S$  с концами в точках  $A$  и  $B$  к линейке» значит поставить каждой точке кривой  $S$  в соответствие точку некоторого отрезка  $LM$  так, что если  $P_1$  и  $P_2$  — какие-нибудь две различные точки кривой  $S$ , а  $Q_1$  и  $Q_2$  — соответствующие им точки отрезка  $LM$ , то  $Q_1$  и  $Q_2$  — различные точки, и, если  $P_1$  расположена ближе, чем  $P_2$ , по кривой  $S$  к точке  $A$ , то  $Q_1$  расположена на отрезке  $LM$  ближе, чем  $Q_2$ , к точке  $L$ . Будем говорить в этом случае, что точкам кривой  $S$  поставлены в соответствие точки отрезка  $LM$  с сохранением порядка (заметим, что при этом не обязательно каждая точка отрезка оказывается поставленной в соответствие какой-то точке кривой  $S$ ).

Итак, «приложить кривую  $S$  к линейке» это значит поставить ее точкам в соответствие (с сохранением порядка) точки некоторого отрезка  $LM$ .

Но мы не умеем сказать, что значит «распрямить» кривую. Вот как мы обойдем эту трудность.

Представим себе, что вместо нитки мы имели бы резинку. Если мы будем пытаться распрямить резинку так же, как нитку, потянув ее концы, резинка растянется. Если теперь растянутую резинку приложить к линейке, то мы не узнаем первоначальной длины резинки, а узнаем

лишь, что эта длина заведомо меньше, чем то число, которое мы получим. Но и это уже кое-что дает.

Оказывается, что с кривой можно поступить так же, как с резинкой. Ее можно «растянуть» и в растянутом виде «приложить» к линейке. Для этого надо поставить в соответствие (с сохранением порядка) точкам

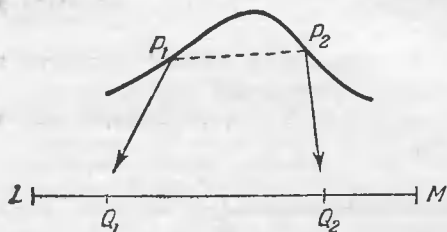


Рис. 3.

кам кривой  $S$  точки некоторого отрезка  $LM$ , так что для любой пары точек  $P_1$  и  $P_2$  кривой  $S$  расстояние между ними на плоскости (длина прямолинейного отрезка, их соединяющего) не больше<sup>1)</sup>, чем расстояние на отрезке  $LM$  между точками  $Q_1$  и  $Q_2$ , соответствующими точкам  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 3). Если осуществлено такое соответствие, то будем говорить, что кривая  $S$  растянута на отрезок.

Не всякую кривую можно растянуть на отрезок. На рис. 4 изображена ломаная, которую нельзя растянуть ни на какой отрезок<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Для полной аналогии с резинкой надо было бы писать «меньше» вместо «не больше», но так нам будет более удобно для дальнейшего.

<sup>2)</sup> Другим примером кривой, не растягивающейся на отрезок, является график известной функции  $y = x \sin \frac{1}{x}$  при  $0 < x \leq \frac{1}{\pi}$ ,  $y = 0$  при  $x = 0$ , имеющийся во многих курсах математического анализа.

Если кривую  $S$  нельзя растянуть ни на какой отрезок, то будем говорить, что *верхняя длина кривой  $S$  равна бесконечности*. Почему мы выбрали такое название, будет видно дальше.

Допустим теперь, что кривую  $S$  можно растянуть на некоторый отрезок  $LM$ . Как и в случае резинки, естественно считать, что у кривой  $S$  длина (дать определение которой нам еще предстоит) должна быть не больше длины отрезка  $LM$ .

Рассмотрим длины всевозможных отрезков, на которые можно растянуть кривую  $S$ . Это есть множество чисел, каждое из которых больше нуля. Следовательно, по теореме 1 это множество имеет нижнюю грань. Будем называть эту нижнюю грань *верхней длиной* кривой. Длина кривой, если ее определить разумно, *не должна быть больше верхней длины*; иначе она окажется больше длины некоторого отрезка, на который можно растянуть кривую  $S$ , что противоречит нашему интуитивному представлению о длине.

Теперь попробуем оценить длину кривой с другой стороны. Для этого воспользуемся следующими двумя соображениями.

1) Если кривую  $S$  разбить на несколько кусков, то длина  $S$  должна быть равна сумме длин этих кусков.

2) Длина кривой должна быть не меньше, чем длина отрезка, соединяющего ее концы (мы говорим «не меньше», а не «больше», так как не исключаем случая, когда кривая сама есть прямолинейный отрезок).

Эти два соображения вместе дают: *длина кривой должна быть не меньше, чем длина ломаной, вписанной в эту кривую*. Под ломаной, вписанной в кривую, здесь понимается следующее. Пусть имеется кривая  $S$  с концами в точках  $A$  и  $B$ ; ломаной, вписанной в  $S$ , называется ломаная, вершины которой лежат на  $S$ , первая вершина совпадает с  $A$ , последняя — с  $B$ , и каждая следующая вершина расположена ближе по кривой к точке  $B$ , чем предыдущая (рис. 5).



Рис. 5.

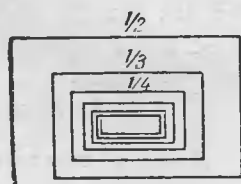


Рис. 4.

Возьмем множество длин всевозможных ломаных, вписанных в кривую  $S$ . Возможны два случая:

1) Все числа множества длин ломаных меньше некоторого числа. Тогда по теореме 1 это множество имеет верхнюю грань. Назовем эту верхнюю грань *нижней длиной* кривой  $S$ .

2) В множестве длин будут присутствовать сколь угодно большие числа. В этом случае мы скажем, что *нижняя длина кривой равна бесконечности*.

Если кривой  $S$  каким-то способом приписана длина, то эта длина должна быть не меньше нижней длины. В противном случае она была

бы больше длины некоторой ломаной, вписанной в  $S$ , что противоречит нашему интуитивному представлению о длине кривой.

Будем обозначать верхнюю длину кривой  $S$  через  $\bar{l}(S)$  и нижнюю длину через  $\underline{l}(S)$ . Если верхняя или нижняя длина кривой  $S$  равна бесконечности, то мы будем писать  $\bar{l}(S) = \infty$  или  $\underline{l}(S) = \infty$ . Если верхняя или нижняя длина кривой  $S$  не есть бесконечность, то будем говорить: длина (верхняя или нижняя)  $S$  конечна, и писать  $\bar{l}(S) < \infty$  или  $\underline{l}(S) < \infty$ .

**Лемма I.** Если  $\underline{l}(S) < \infty$  и  $\bar{l}(S) < \infty$ , то  $\underline{l}(S) \leq \bar{l}(S)$ .

**Доказательство.** Допустим противное:

$$\underline{l}(S) > \bar{l}(S).$$

Так как  $\underline{l}(S)$  является верхней гранью длин ломаных, вписанных в  $S$ , то среди них найдется ломаная  $C$ , длина которой больше  $\bar{l}(S)$ . Пусть вершины ломаной  $C$  суть  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . Так как, далее,  $\bar{l}(S)$  есть нижняя грань длин отрезков, на которые можно растянуть кривую  $S$ , то найдется отрезок  $LM$ , на который можно растянуть кривую  $S$  и такой, что его длина меньше длины ломаной  $C$ .

Растянем кривую  $S$  на этот отрезок  $LM$ . При этом точки  $P_0, P_1, \dots, P_n$  перейдут в какие-то точки  $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$  отрезка  $LM$ , расположенные каждая следующая ближе к  $M$ , чем предыдущая (рис. 6). Длина отрезка  $P_0P_1$  не больше длины отрезка  $Q_0Q_1$ , длина отрезка  $P_1P_2$  не больше длины отрезка  $Q_1Q_2$  и т. д. Следовательно, длина ломаной  $C$  не больше длины отрезка  $LM$ . Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

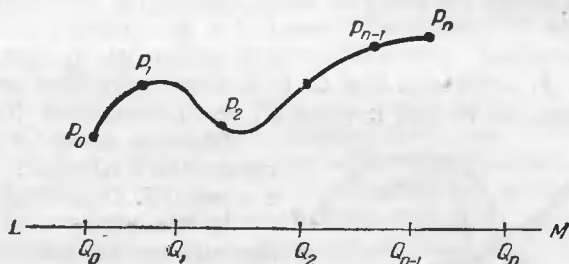


Рис. 6.

**Лемма II.** Пусть  $S$  — кривая с концами в точках  $A$  и  $B$ , такая, что  $\underline{l}(S) < \infty$ . Пусть, далее,  $P$  — некоторая точка кривой  $S$  и  $S_1$  и  $S_2$  — соответственно части кривой  $S$ , заключенные между точками  $A$  и  $P$  и точками  $P$  и  $B$  (рис. 7). Тогда  $\underline{l}(S_1) + \underline{l}(S_2) = \underline{l}(S)$ .

**Доказательство.** Так как ломаная, вписанная в  $S_1$ , вместе с ломаной, вписанной в  $S_2$ , образует ломаную, вписанную в  $S$ , верхняя

грань длин ломаных, вписанных в  $S$ , не меньше, чем сумма верхних граней длин ломаных, вписанных в  $S_1$  и  $S_2$ , т. е.

$$\underline{l}(S_1) + \underline{l}(S_2) \leq \underline{l}(S). \quad (*)$$

С другой стороны, для произвольной ломаной  $C$ , вписанной в  $S$ , найдется ломаная  $C'$ , вписанная в  $S$ , с вершиной в точке  $P$  и имеющая длину не меньшую, чем длина  $C$ . Для того чтобы получить такую ломаную  $C'$ , достаточно взять на ломаной  $C$  вершины, расположенные на кривой  $S$  по разные стороны от  $P$  и ближайшие к  $P$  по кривой, и заменить звено ломаной  $C$ , их соединяющее, двумя звеньями с общей вершиной в  $P$  (рис. 8) и новую ломаную принять за  $C'$ . Но ломаную  $C'$  можно считать составленной из двух ломаных, одна из которых вписана в  $S_1$ , а другая в  $S_2$ . Следовательно, верхняя грань длин ломаных, вписанных в  $S$ , не больше, чем сумма верхних граней длин ломаных, вписанных в  $S_1$  и  $S_2$ , т. е.

$$\underline{l}(S) \leq \underline{l}(S_1) + \underline{l}(S_2).$$

Вместе с соотношением  $(*)$  это дает

$$\underline{l}(S_1) + \underline{l}(S_2) = \underline{l}(S),$$

что и требовалось доказать.

**Лемма III.** Если  $\underline{l}(S) < \infty$ , то  $\bar{l}(S)$  конечна и  $\bar{l}(S) \leq \underline{l}(S)$ .

**Доказательство:** Пусть кривая  $S$  имеет своими концами точки  $A$  и  $B$ . Обозначим через  $S(P'P'')$  часть кривой  $S$ , заключенную между точками  $P'$  и  $P''$ . Возьмем отрезок  $LM$ , длина которого равна  $\underline{l}(S)$ . Установим следующее соответствие между точками кривой  $S$  и точками отрезка  $LM$ : точке  $A$  поставим в соответствие точку  $L$  и произвольной точке  $P$  кривой поставим в соответствие точку  $Q$  отрезка, отстоящую от точки  $L$  на расстояние, равное  $\underline{l}(S(AP))$ . Покажем, что это соответствие является растяжением.

Действительно, если точки  $P'$  и  $P''$  лежат на кривой  $S$ , причем точка  $A$  расположена ближе по кривой к точке  $A$ , чем точка  $P''$ , то, в силу леммы II,

$$\underline{l}(S(AP'')) - \underline{l}(S(AP')) = \underline{l}(S(P'P'')),$$

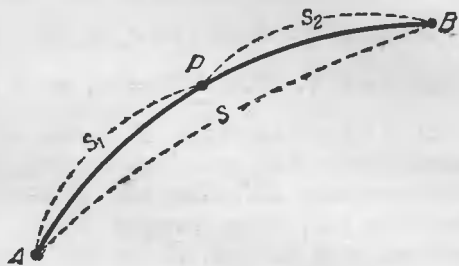


Рис. 7.

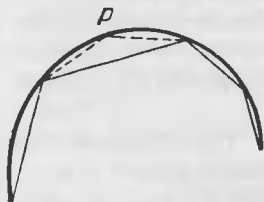


Рис. 8.



и так как  $\underline{l}(P'P'')$  не меньше, чем расстояние между точками  $P'$  и  $P''$ , то наше соответствие является растяжением. Итак, кривую  $S$  можно растянуть на отрезок длины  $\underline{l}(S)$ , т. е.

$$\bar{l}(S) \leq \underline{l}(S),$$

что и требовалось доказать.

Лемма III в соединении с леммой I дает нам следующую лемму

Лемма IV. Если  $\underline{l}(S) < \infty$ , то  $\bar{l}(S) < \infty$  и  $\underline{l}(S) = \bar{l}(S)$ .

Лемма V. Если  $\underline{l}(S) = \infty$ , то и  $\bar{l}(S) = \infty$ .

Доказательство. Допустим, что  $\bar{l}(S) < \infty$ . Тогда существует такой отрезок  $LM$ , что  $S$  можно растянуть на этот отрезок. Пусть  $m$  — длина отрезка  $LM$ . Так как  $\underline{l}(S) = \infty$ , то существует ломаная  $C$ , вписанная в  $S$ , длина которой больше  $m$ . Пусть  $P_0, P_1, \dots, P_n$  — вершины этой ломаной. Пусть при растяжении  $S$  на отрезок  $LM$  точкам  $P_0, P_1, \dots, P_n$  соответствуют точки  $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ . Расстояние между точками  $P_{i-1}$  и  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) не больше расстояния между точками  $Q_{i-1}$  и  $Q_i$ . Следовательно, длина отрезка не меньше длины ломаной. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Леммы IV и V дают нам следующую теорему:

Теорема II. Пусть  $S$  — произвольная кривая. Тогда либо

$$1) \underline{l}(S) = \infty \text{ и } \bar{l}(S) = \infty,$$

либо

$$2) \underline{l}(S) < \infty, \text{ и } \bar{l}(S) < \infty, \text{ и } \underline{l}(S) = \bar{l}(S).$$

Мы видели, что если хотеть, чтобы длина кривой соответствовала нашему интуитивному представлению о длине кривой, то она должна быть заключена между значениями нижней и верхней длин. Но эти значения совпадают. Следовательно, остается один выход: *положить длину кривой равной общему значению нижней и верхней длин*. Будем обозначать так определенную длину кривой через  $l(S)$ .

Обычно длину кривой определяют как предел длин последовательности вписанных ломаных, когда длина наибольшего звена ломаной стремится к нулю. Покажем, что это определение приведет к тому же самому значению длины.

Будем называть число, равное пределу длин последовательности ломаных, вписанных в кривую  $S$ , *классической длиной* кривой  $S$  в отличие от длины  $l(S)$ , равной общему значению нижней и верхней длин.

Теорема III. Для всякой кривой  $S$  ее классическая длина равна длине  $l(S)$ .

Доказательство. Пусть кривая  $S$  имеет концами точки  $A$  и  $B$ . Обозначим через  $S(P)$  часть кривой  $S$ , заключенную между точками  $A$  и  $P$ , где  $P$  — какая-нибудь точка кривой  $S$ . Обозначим через  $l^*(S)$  классическую длину кривой  $S$  и через  $l^*(S(P))$  классическую

длину кривой  $S(P)$ . Рассмотрим отрезок  $LM$ , длина которого равна  $l^*(S(B)) = l^*(S)$ . Поставим каждой точке  $P$  кривой  $S$  в соответствие точку  $Q$  отрезка  $LM$ , лежащую на расстоянии  $l^*(S(P))$  от точки  $L$ .

Для любых точек  $P'$  и  $P''$  кривой  $S$  расстояние между точками  $Q'$  и  $Q''$ , соответствующими им, равно классической длине куска кривой  $S$ , лежащего между точками  $P'$  и  $P''$ , и, следовательно, не меньше длины прямолинейного отрезка, соединяющего точки  $P'$  и  $P''$ . Следовательно, наше соответствие есть растяжение кривой  $S$  на отрезок  $LM$ . Таким образом,

$$\bar{l}(S) \leq l^*(S).$$

Далее,

$$\underline{l}(S) \geq l^*(S),$$

так как если бы это было не так, то нашлась бы ломаная, вписанная в  $S$ , длина которой больше  $\underline{l}(S)$ , что невозможно. Мы получаем:

$$\bar{l}(S) \leq l^*(S) \leq \underline{l}(S),$$

и так как  $\bar{l}(S) = \underline{l}(S)$ , то  $l^*(S) = \underline{l}(S)$ , что и требовалось доказать.

Можно более четко сформулировать те требования, которые мы хотим предъявить к определению длины кривой и которые однозначно приведут к той конструкции, которую мы построили. Для этого нам понадобится еще одно определение:

Пусть имеются две кривые: кривая  $S'$  с концами  $A'$  и  $B'$  и кривая  $S''$  с концами  $A''$  и  $B''$ . Мы скажем, что кривая  $S'$  *растянута на кривую  $S''$* , если каждой точке кривой  $S'$  поставлена в соответствие некоторая точка кривой  $S''$ , так что:

- а) двум различным точкам  $P_1$  и  $P_2$  кривой  $S'$  поставлены в соответствие две различные точки  $Q_1$  и  $Q_2$  кривой  $S''$ ;
- б) если  $P_1$  расположена по кривой ближе, чем  $P_2$ , к точке  $A'$ , то точка  $Q_1$  расположена по кривой ближе к точке  $A''$ , чем точка  $Q_2$ ;
- в) длина отрезка  $Q_1Q_2$  больше длины отрезка  $P_1P_2$ .

Теперь мы можем сформулировать наши требования. Каждой кривой  $S$  мы хотим приписать некоторое положительное число  $\lambda(S)$  — ее длину или объявить, что длина кривой равна бесконечности (в этом случае будем писать  $\lambda(S) = \infty$ ) так, что при этом выполняются условия:

- 1) Если кривая  $S'$  может быть растянута на кривую  $S''$ , то

$$\lambda(S_1) \leq \lambda(S_2)^1).$$

- 2) Пусть  $S$  — кривая с концами в точках  $A$  и  $B$ . Пусть  $P_0 = A$ ,  $P_1, P_2, \dots, P_n = B$  — некоторые ее точки, расположенные по кривой

<sup>1)</sup> Будем для удобства писать  $\lambda(S_1) < \lambda(S_2)$ , если  $\lambda(S_1)$  конечна, а  $\lambda(S_2)$  бесконечна, и писать  $\lambda(S_1) = \lambda(S_2)$ , если  $\lambda(S_1) = \infty$  и  $\lambda(S_2) = \infty$ , так что  $\lambda(S_1) \leq \lambda(S_2)$  включает в себя и тот случай, когда  $\lambda(S_2) = \infty$ .

в порядке от  $A$  к  $B$ . Пусть  $S_i$  — кусок кривой между точками  $P_{i-1}$  и  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) (рис. 9). Тогда  $\lambda(S) = \lambda(S_1) + \dots + \lambda(S_n)$ .

3) Если кривая  $S$  есть прямолинейный отрезок, то число  $\lambda(S)$  должно быть равно общепринятому значению длины отрезка.

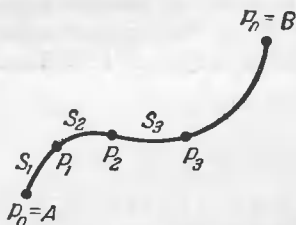


Рис. 9.

**Теорема IV.** *Определение длины  $l(S)$ , данное нами, удовлетворяет требованиям 1), 2) и 3).*

**Доказательство.** Пусть кривая  $S_1$  может быть растянута на кривую  $S_2$ . Пусть точке  $P$  кривой  $S_1$  при этом ставится в соответствие точка  $Q$  кривой  $S_2$ . Если длина  $l(S_2)$  кривой  $S_2$  равна бесконечности, то условие 1) выполнено. Пусть длина  $l(S_2)$  конечна. Пусть  $LM$  — отрезок, на который можно растянуть  $S_2$ .

Пусть при этом точке  $Q$  кривой  $S_2$  соответствует точка  $R$  отрезка  $LM$ . Поставим каждой точке  $P$  кривой  $S_1$  в соответствие точку  $R$  отрезка  $LM$ , которая соответствует той точке  $Q$  кривой  $S_2$ , которая в свою очередь соответствует точке  $P$  кривой  $S_1$ . Тогда кривая  $S_1$  окажется также растянутой на отрезок  $LM$ . Но отсюда следует, что

$$\bar{l}(S_1) \leq \bar{l}(S_2),$$

т. е.

$$l(S_1) \leq l(S_2).$$

Мы доказали выше, что если кривую  $S$  разбить на две части одной ее точкой  $P$ , то нижняя длина  $\underline{l}(S)$  равна сумме нижних длин этих частей. Отсюда по индукции получаем это для разбиения  $S$  на любое число частей, и так как  $\underline{l}(S) = l(S)$ , то свойство 2) также выполняется.

Свойство 3) выполняется очевидным образом: длина отрезка  $S$  равна общепринятой длине ломаной, в него вписанной, и потому нижняя длина  $\underline{l}(S)$  отрезка равна его длине. Но  $\underline{l}(S) = l(S)$ . Теорема доказана.

Покажем теперь, что  $l(S)$  — единственная длина, удовлетворяющая требованиям 1), 2) и 3).

**Теорема V.** *Если для каждой кривой  $S$  определено число  $\lambda(S) > 0$  (или сказано, что  $\lambda(S)$  равно бесконечности), удовлетворяющее требованиям 1), 2) и 3), то  $\lambda(S) = l(S)$  для всех кривых  $S$ .*

**Доказательство.** Пусть кривую  $S$  можно растянуть на отрезок  $LM$ . Тогда в силу условий 1) и 3) число  $\lambda(S)$  не больше длины отрезка  $LM$ . Следовательно,  $\lambda(S) \leq \bar{l}(S)$ .

Если  $S$  нельзя растянуть ни на какой отрезок, то  $\bar{l}(S) = \infty$ ; следовательно, также  $\lambda(S) \leq \bar{l}(S)$ .

Докажем теперь, что

$$\lambda(S) \geq \underline{I}(S).$$

Для этого нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

**Лемма VI.** Пусть имеется кривая  $S$  с концами в точках  $A$  и  $B$ . Соединим точки  $A$  и  $B$  прямолинейным отрезком (рис. 10) и возьмем на этом отрезке какую-нибудь точку  $Q$ ; через точку  $Q$  проведем прямую  $t$ , перпендикулярную к отрезку  $AB$ . Тогда эта прямая обязательно пересечет кривую  $S$ .

Это очевидное на глаз утверждение имеет не очень простое доказательство, которое мы дадим позднее, а сейчас, допуская, что лемма VI верна, продолжим доказательство нашей теоремы.

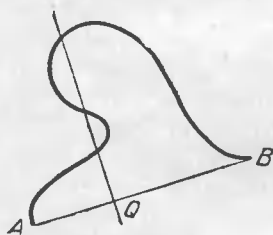


Рис. 10.

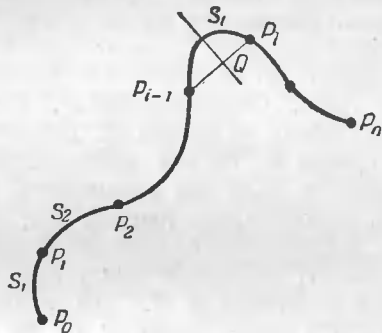


Рис. 11.

Впишем в кривую  $S$  ломаную; пусть ее вершины суть  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . Обозначим через  $S_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) часть кривой  $S$ , заключенной между точками  $P_{i-1}$  и  $P_i$  (рис. 11). Рассмотрим кривую  $S_i$  и стягивающее ее звено  $P_{i-1}P_i$  ломаной. Возьмем произвольную точку  $Q$  отрезка  $P_{i-1}P_i$  и проведем через нее прямую, перпендикулярную к этому отрезку. По лемме VI она пересечет кривую  $S_i$ . Возьмем точку пересечения (если таких точек больше, чем одна, то возьмем любую из них) и поставим ее в соответствие точке  $Q$  отрезка. Мы получим растяжение отрезка  $P_{i-1}P_i$  на кривую  $S_i$ . Следовательно, в силу условия 1)

$$\lambda(P_{i-1}P_i) \leq \lambda(S_i).$$

Но в силу условия 3)  $\lambda(P_{i-1}P_i)$  равно длине отрезка  $P_{i-1}P_i$ . Далее, по условию 2)  $\lambda(S) = \lambda(S_1) + \lambda(S_2) + \dots + \lambda(S_n)$  и, значит,  $\lambda(S)$  больше либо равно длине ломаной, т. е.

$$\lambda(S) \geq \underline{I}(S).$$

[Сюда включается случай, когда  $\underline{I}(S) = \infty$ , так как если бы при этом  $\lambda(S)$  было бы конечно, то нашлась бы ломаная, вписанная в  $S$ , длина которой больше  $\lambda(S)$ , что, как мы видели, невозможно.]

Таким образом,

$$\overline{l}(S) \leq \lambda(S) \leq \underline{l}(S)$$

и

$$\lambda(S) = l(S),$$

что и требовалось доказать.

Нам осталось доказать лемму VI.

Доказательство леммы VI. Допустим, что лемма неверна и прямая  $m$  не пересекает кривой  $S$ . Прямая  $m$  делит плоскость на две части. Будем называть ту ее часть, где находится точка  $A$ , левой, а ту, где лежит  $B$ , правой. Вспомним наше определение кривой: имеется отрезок  $[t_1, t_2]$  оси  $t$ , каждой точке  $t$  которого соответствует точка  $P(t)$  кривой.  $P(t_1) = A$  лежит слева от  $m$ , точка  $P(t_2) = B$  — справа. Рассмотрим все те значения  $t$  отрезка  $[t_1, t_2]$ , для которых точка  $P(t)$  лежит слева от прямой  $m$ . Все эти точки лежат левее  $t_2$  и, значит, по теореме I для множества этих точек существует верхняя грань. Обозначим ее  $t^*$ . Рассмотрим  $P(t^*)$ . Я утверждаю, что  $P(t^*)$  лежит на прямой  $m$ . Действительно, если точка  $P(t^*)$  не лежит на прямой  $m$ , то она расположена на каком-то расстоянии  $\varepsilon > 0$  от прямой  $m$ . Если она расположена слева от прямой  $m$ , то так как  $t^*$  есть верхняя грань точек  $t$ , для которых  $P(t)$  лежит слева от  $m$ , то для любой точки  $t$ , лежащей правее  $t^*$ ,  $P(t)$  лежит справа от прямой  $m$  и, значит, расстояние между  $P(t)$  и  $P(t^*)$  больше  $\varepsilon$ , как бы близко это  $t$  ни лежало к  $t^*$ . Это противоречит определению кривой. Если же  $P(t^*)$  лежит справа от  $m$ , то, по определению верхней грани, как угодно близко к  $t^*$  лежат точки  $t$ , для которых  $P(t)$  лежит левее  $m$ , и мы опять приходим к противоречию с определением кривой. Лемма доказана.

Мы убедились в том, что существует единственный разумный способ введения длины кривой. Небезынтересно отметить, что для площади поверхности это уже не так: имеются существенно различные способы определения площади поверхности, приводящие к разным числам для некоторых поверхностей. Это обстоятельство указывает на нетривиальность наших рассуждений.

Мы ограничились в этой статье случаем простых дуг. Все рассуждения без труда переносятся на случай произвольных непрерывных кривых.

## ТРИГОНОМЕТРИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ<sup>1)</sup>

Я. С. Дубнов

(Москва)

Нередко преподаватели средней школы выражают недовольство по поводу включения в курс геометрии 8-го класса главы, посвященной тригонометрии острого угла. Указывают на то, что: 1) эта глава является инородным телом, нарушающим стиль изложения геометрии (на время исчезают теоремы, леммы и пр.); 2) полученные учениками сведения из тригонометрии повисают в воздухе на протяжении остальной части курса 8-го класса и потому легко улетучиваются; 3) в лучшем случае память учащихся сохраняет определения тригонометрических функций как отношений сторон в прямоугольном треугольнике, а это не помогает, иногда даже мешает усвоению более общих определений в 9-м классе (где поэтому приходится «переучивать»); 4) вообще, отрывок тригонометрии в 8-м классе есть проявление концентризма, к которому большинство наших педагогов относится отрицательно.

Когда критикам указывают на образовательную ценность осуждаемой главы, в частности на открывающиеся в ней возможности политехнизации (измерения на местности, пользование таблицами, построение графиков и сопоставление их с таблицами, работа силы в физике), они возражают, что ведь никто не предлагает изъять эту тематику, речь идет только о том, чтобы отсрочить ее менее чем на один год, включив в единый «систематический» курс тригонометрии.

Существующую программу я также склонен подвергнуть пересмотру, но не с позиций изложенных выше четырех пунктов. По поводу последних хочу сделать следующие замечания. 1) Об ущербе для евклидова стиля построения геометрии вряд ли стоит беспокоиться. Наоборот, следует желать, чтобы от этого стиля всё более освобождалось преподавание геометрии, чтобы всё более стирались различия в способах изложения геометрии и остальных математических дисциплин. В наше время немного уже остается людей, полагающих, что внутри математики геометрия выделяется какой-то особой логической структурой.

---

<sup>1)</sup> Расширенное изложение доклада, сделанного 19 января 1956 г. в школьной секции Московского математического общества.

2) Констатация того, что сведения из тригонометрии не находят себе приложений в курсе 8-го класса, справедлива. Но отсюда должны быть сделаны другие выводы: не ликвидировать надо эту тему, а наоборот, расширить ее плацдарм, ввести ее в курс геометрии органически. Как это сделать с пользой и для тригонометрии и для геометрии, будет сказано ниже. 3) Верно и то, что ограничение функциями острого угла порождает некоторые трудности в деле предстоящего расширения области определения этих функций. Но это только дает толчок к тому, чтобы уже в 8-м классе ввести функции тупого угла. Ниже будет показано, как это можно сделать — снова с выигрышем для геометрии. 4) Не могу присоединиться к огульному осуждению концентризма, который в ряде случаев педагогически обоснован, а иногда канонизирован современным преподаванием (концентрическое расширение запаса чисел, обобщение понятия о степени и др.).

Дальнейшее изложение распадается на две части: в первой содержится предложения, осуществимые в рамках действующей программы; они могут уже сейчас быть полезными для преподавателя, склонного отказаться от шаблона. Здесь, как и всюду, я избегал стиля «метод-разработки», чтобы оставить преподавателю достаточную свободу действий. Вторая часть содержит проект изменения программы, точнее, перегруппировки внутри программы геометрии и тригонометрии в 8—9-х классах. Нигде эти изменения не направлены в сторону увеличения общего объема этих курсов, наоборот, основная тенденция их — упрощение, рационализация и существенное сокращение программы по математике (в этом отношении как особенно радикальная будет, вероятно, воспринятая заключительная часть этой статьи).

**1. Функции острого угла.** В 8-м классе непосредственно вслед за подобием треугольников (и многоугольников) становится возможным определить функции  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  ( $0 < \alpha < 90^\circ$ ) как отношения сторон прямоугольного треугольника.

Определения закрепляются упражнениями на: 1) графическое нахождение числовых значений (в грубом приближении) функций для углов, заданных на чертеже или же в градусах (удобно пользоваться миллиметровой бумагой); 2) построение острого угла по заданному значению той или другой функции; при этом выясняется, в каких пределах можно задавать эти значения для каждой из функций.

Затем изучаются таблицы трех функций и попутно объясняются формулы  $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha$ ,  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ ,  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  с проверкой их на таблицах для частных значений  $\alpha$ . С помощью таблиц можно построить графики трех функций в промежутке  $(0, 90^\circ)$ , считая абсциссы пропорциональными углом, например, откладывая по оси абсцисс значения угла в градусах, а по оси ординат числовые значения функций, каждый раз в удобных для нас масштабах<sup>1)</sup>. Уместно

<sup>1)</sup> Тем педагогам, которые отказываются от таких графиков и считают единственно законными графики функций числового (а не углового) аргумента

также поручить учащимся строить графики без таблиц, пользуясь линейкой, циркулем, наугольником и транспортиром, например так, как это показано для  $\sin \alpha$  на рис. 1. Предполагается, что после этого решают с помощью таблиц десяток-другой задач с линейными и угловыми данными и искомыми, ограничиваясь прямоугольным и равнобедренным треугольниками и ромбом. Если время позволяет, то решают несколько задач «на местности», с воображаемыми или действительными измерениями.

На этом обычно заканчивается первое и слишком кратковременное знакомство учащихся с тригонометрией, возобновляясь уже только

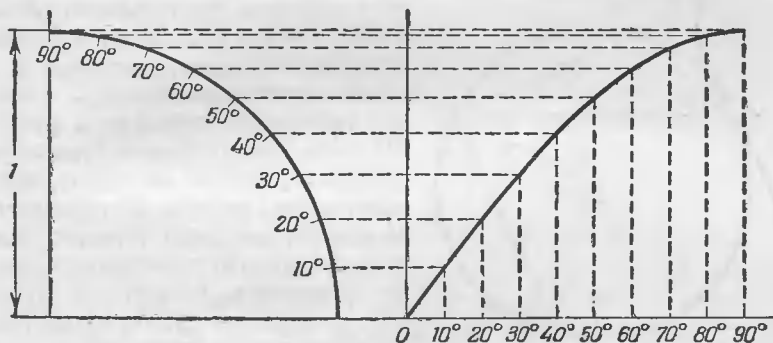


Рис. 1.

в 9-м классе. Такое именно положение дела вызывает, как отмечалось, справедливые нарекания. Между тем, существуют широкие возможности применять сведения по тригонометрии острого угла в непосредственно следующих главах геометрии, не разрывая этой нити до конца курса 8-го класса. Преподавателю, который стал бы на этот путь, никто не мог бы предъявить обвинение в произвольном расширении рамок программы, так как не будет затронут ни один вопрос, выходящий из этих рамок, и не потребуются дополнительной затраты времени. Помещенные ниже предложения относятся: а) к решению задач, считающихся по традиции чисто геометрическими; б) к изучению средствами тригонометрии геометрических фактов, намеченных программой.

а) Начну с примера, заимствуя его из геометрического задачника Н. Рыбкина (ч. 1, § 11, № 45, изд. 6, 1937).

Радиус окружности 8 дм; хорда  $AB = 12$  дм. Через  $A$  проведена касательная, а из  $B$  хорда  $BC$  параллельно касательной. Найти расстояние между касательной и хордой  $BC$ .

Предлагаю решение (с анализом; рис. 2): в качестве искомого расстояния возьмем длину перпендикуляра  $BD$  из  $B$  на касательную ( $AD$ ).

с одинаковыми масштабами по обеим осям, можно напомнить, что этим создается нежелательный разрыв между математикой и физикой, которая никогда не согласится с тем, чтобы аргумент и функция были обязательно одинаковой природы.



Так как в треугольнике  $ABD$  гипотенуза  $AB$  известна, то для нахождения  $BD$  достаточно (и необходимо) знать  $\sin \alpha$  ( $\alpha = \angle BAD$ ). Но этот угол измеряется половиной дуги  $\widehat{AB}$  и, следовательно, равен половине центрального угла  $AOB$ , т. е.  $\alpha = \angle EOB$ , где  $E$  — середина хорды  $AB$ . Теперь  $\sin \alpha$  легко найти из треугольника  $OBE$ , в котором известны  $OB = 8$  и  $BE = 6$ . Итак,  $\sin \alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ , откуда  $BD = AB \sin \alpha = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9$  (дм). Как видим, решение устное.

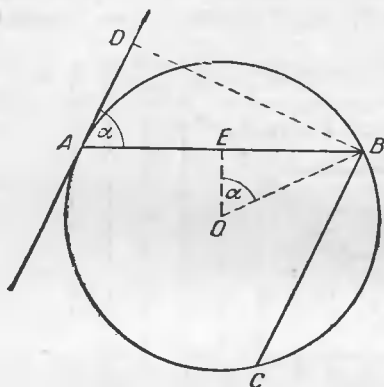


Рис. 2.

Конечно, здесь можно было обойтись подобием треугольников ( $ABD$  и  $OBE$ ), как это происходит в большинстве других задач, решаемых с помощью тригонометрических функций без применения таблиц этих функций. Но разве одно отношение (тригонометрическая функция) не проще, чем равенство двух отношений (пропорция)<sup>1)</sup>. И следует ли после того, как произошло знакомство с тригонометрическими функциями, избегать их применения, а не пользоваться каждым подходящим для этого случаем?

б) Но и при доказательстве теорем имеется много упускаемых нами возможностей применять тригонометрические функции с пользой для дела. Поясним это на примере вывода соотношений между элементами прямоугольного треугольника.

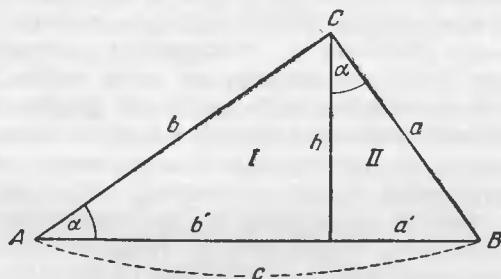


Рис. 3.

Рассмотрим хорошо знакомую фигуру (рис. 3), где  $C = 90^\circ$ , а привычные обозначения легко вспомнить по чертежу (высота  $h$  разбивает

<sup>1)</sup> С аналогичным положением можно встретиться в арифметике, например, при решении следующей задачи: 7 тетрадей стоят 91 коп.; сколько стоят 5 тетрадей? 1-й способ:  $91:7 = 13$  (коп.);  $13 \cdot 5 = 65$  коп. 2-й способ:  $7:91 = 5:x$  и т. д.

треугольник  $ABC$  на два треугольника  $I$  и  $II$ ). Угол  $\alpha$  встречается во всех трех треугольниках; поэтому каждая из его тригонометрических функций может быть тройко выражена через отмеченные на чертеже элементы (выбор этих элементов как раз объясняется стремлением к тому, чтобы была отмечена каждая сторона каждого треугольника), как показывает следующая схема:

Функция	Из треугольника		
	$ABC$	$I$	$II$
$\sin \alpha$	$\frac{a}{c}$	$\frac{h}{b}$	$\frac{a'}{a}$
$\cos \alpha$	$\frac{b}{c}$	$\frac{b'}{b}$	$\frac{h}{a}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{a}{b}$	$\frac{h}{b'}$	$\frac{a'}{h}$

Приравнявая друг другу три выражения для каждой из трех функций, получим соотношения между  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $a'$ ,  $b'$  и  $h$  в виде девяти пропорций. Не все они представляют интерес; выделим прежде всего непрерывные пропорции:

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{a}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{b}, \quad \frac{h}{b'} = \frac{a'}{h}$$

или вместо них

$$a^2 = ca', \quad b^2 = cb', \quad h^2 = a'b'; \quad (1)$$

словесная формулировка этих соотношений приводит к известной теореме. Но и среди остальных пропорций одна заслуживает внимания: сравнивая первые два выражения для  $\sin \alpha$ , имеем:

$$\frac{a}{c} = \frac{h}{b}$$

или

$$ab = ch$$

(«произведение катетов равно произведению гипотенузы на соответствующую ей высоту») — полезный при решении задач факт, знакомство с которым обычно откладывается до главы о площадях и там часто проходит незамеченным.

Как видим, и здесь тригонометрические функции освобождают только от рассмотрения подобных треугольников, но рассуждение кажется мне лучше организованным и не опирающимся на предварительно формулируемую теорему. Более того, желательно, чтобы словесная формулировка следовала за полученными соотношениями, а не предшествовала им (здесь также пора порвать с евклидовой традицией).

Из первых двух равенств (1) обычным путем получается теорема Пифагора:  $a^2 + b^2 = c^2$ , а от нее снова возвращаемся к тригонометрии:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \text{ или } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Последнее равенство позволяет по одной из функций  $\sin$ ,  $\cos$  вычислять другую, а в соединении с уже упоминавшимся равенством  $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha$  — по значению одной из функций  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$  вычислять значения остальных. Можно предлагать ученикам упражнения типа: в совместной для трех функций таблице один столбец закрыт полоской бумаги; в указанной преподавателем строке восстановить закрытое число (более сложный вариант: закрыты два столбца). Полученные вычислением результаты проверяются по таблицам, разумеется, с учетом приближенного характера помещенных там значений.

Теперь нетрудно составить и постепенно запомнить полную таблицу значений (точных и приближенных)  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$  для углов  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  и в дальнейшем пользоваться ею при решении задач, где встречаются эти углы.

Непосредственное применение найдет себе эта таблица в главе о правильных многоугольниках. Обозначая для круга радиуса  $R$  через  $a_n$  и  $b_n$  стороны правильных  $n$ -угольников соответственно вписанного и описанного, легко вывести:

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad b_n = 2R \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}. \quad (2)$$

Отсюда с помощью упомянутой таблицы сразу находим  $a_3$ ,  $b_3$ ,  $a_4$ ,  $b_4$ ,  $a_6$ ,  $b_6$  (конечно, некоторые из этих результатов получаются проще геометрически, и это надо сделать).

Полезно также в виде упражнения получить выражение для  $b_n$  через  $a_n$  и  $R$ ; достаточно исключить  $\frac{180^\circ}{n}$  из (2), например, так: из первого равенства (2) находим:

$$\cos \frac{180^\circ}{n} = \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4R^2}}, \quad (3)$$

а отсюда и из второго равенства (2)

$$b_n = \frac{2R \sin \frac{180^\circ}{n}}{\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4R^2}}} = \frac{a_n}{\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4R^2}}}.$$

Те же формулы (2) могут быть применены, когда в связи с длиной окружности мы захотим, например, найти периметры правильных вписанного и описанного 180-угольников. Они окажутся равными соответственно

$$360R \sin 1^\circ \text{ и } 360R \operatorname{tg} 1^\circ;$$

конечно, заимствуя  $\sin 1^\circ$  и  $\operatorname{tg} 1^\circ$  из таблиц, необходимо учесть увеличение имеющейся там погрешности при умножении на 360.

Таким образом, вплоть до конца планиметрии мы имеем неоднократный повод возвращаться к тригонометрическим функциям острого угла и извлекать отсюда пользу для геометрии.

**2. Функции тупого угла.** Однако изучение зависимостей между элементами произвольного треугольника останется неполным, пока не введены тригонометрические функции тупого угла: ведь и такой может появиться в треугольнике. Искусственное ограничение функциями острого угла приводит к раздвоению таких теорем, как о нахождении квадрата стороны по двум другим и образуемому ими углу<sup>1)</sup>. Предлагая в дальнейшем план включения функций тупого угла в курс геометрии, я выхожу за рамки программы 8-го класса, но не за рамки программы по математике в целом.

Со стороны учебного плана реальность перегруппировки некоторых вопросов тригонометрии и геометрии не может вызвать сомнений, так как к программе старших классов ничего не прибавляется (наоборот, кое-что окажется возможным изъять), а уничтожение «водонепроницаемых переборок» (Ф. Клейн) между двумя родственными предметами способно только рационализировать преподавание, сберечь время и силы учащихся.

Формальная сторона перехода от острого угла к тупому не представляет затруднений: достаточно объявить синус тупого угла равным синусу смежного острого, а косинус тупого угла равным косинусу смежного, взятому со знаком минус. Таким образом, по определению

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad (4)$$

для  $0 < \alpha < 90^\circ$ ; тут же (особенно в связи со словесными формулировками: «синусы смежных углов равны друг другу, косинусы... отличаются только знаком») выясняется, что равенства (4) остаются в силе и для  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Теперь покажутся естественными (особенно в связи с построением графиков для расширенной области изменения  $\alpha$ ) соглашения

$$\begin{aligned} \sin 0^\circ &= \sin 180^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0, \\ \cos 0^\circ &= 1, \quad \cos 180^\circ = -1, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> В своей «Методике» (изд. 1949 г.) В. М. Брадис предлагает даже формулу для площади треугольника писать двойко:  $S = 0,5 ab \sin C$  при  $C < 90^\circ$  и  $S = 0,5 \sin(180^\circ - C)$  при  $90^\circ < C < 180^\circ$ , «так как учащиеся в VIII классе еще не знают, что  $\sin(180^\circ - C) = \sin C$ ». Пользуюсь случаем сказать, что к пожеланиям В. М. Брадиса относительно более широкого применения тригонометрии к решению геометрических задач в рамках существующей программы (стр. 392—393 цитированной книги) я, конечно, присоединяюсь, но считаю, что на этом не следует останавливаться.

в результате чего  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  становятся определенными для  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Функцию  $\operatorname{tg} \alpha$  в том же промежутке можно определить как  $\sin \alpha : \cos \alpha$  с оговоркой  $\alpha \neq 90^\circ$ .

Более трудная педагогическая задача состоит в том, чтобы убедить учеников в разумности декларированных определений (впрочем, это не сложнее, чем, например, при обобщении степени на случай ненатурального показателя). Достаточно дать для тригонометрических функций такие обобщающие определения, которыми охватывались бы все до сих пор рассмотренные. По-видимому наиболее простой путь лежит через координаты, с которыми учащийся уже хорошо знаком: помещаем угол в координатной плоскости так, чтобы его вершина попала в начало координат, одна из сторон совпала с положительной полуосью  $X$ , а другая сторона расположилась в 1-й или 2-й четверти. Если на этой последней стороне отложить от вершины  $O$  отрезок  $OM=1$ , то определяем синус и косинус угла  $\alpha$  как соответственно ординату и абсциссу точки  $M$ . Легко доказывается, что этим определением охватываются все предыдущие. (Попутно ликвидируется одно неудобство, о котором упоминалось в начале статьи: координатное определение при небольших пояснениях годится для любых углов, так что после обобщения понятия об угле «переучивать» не придется.) В силу формул (4) новых таблиц для функций тупого угла не потребуется.

Теперь мы в состоянии развить полную систему зависимостей между элементами треугольника, в качестве каковой можно взять (не считая равенства  $A+B+C=180^\circ$ ) либо теорему синусов, либо теорему косинусов. Первая доказывается одним из общеупотребительных способов: на основании формулы  $a:2R=\sin A$  или же с помощью проведения высоты (два случая). Теорема косинусов — снова с помощью высоты (два случая) или (несколько длиннее, но поучительнее) на основании предварительно выведенной (два случая) формулы

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

Вместе с двумя аналогичными

$$b = a \cos C + c \cos A,$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

имеем систему трех уравнений, линейных неоднородных относительно  $\cos A$ ,  $\cos B$ ,  $\cos C$  и линейных однородных относительно  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Принимая косинусы за неизвестные и решая систему, найдем формулу

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (5)$$

и еще две аналогичных, составляющих вместе с (5) теорему косинусов (чаще записываемую в форме  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ ). Если же считать  $A$ ,  $B$ ,  $C$  данными, а  $a$ ,  $b$ ,  $c$  искомыми, то для однородной системы прежде всего встает вопрос об условии существования ненулевого решения:

это условие имеет вид

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C - 1 = 0 \quad (6)$$

и при  $0 < A + B < 180^\circ$  равносильно очевидному заранее условию  $A + B + C = 180^\circ$ . Если (6) выполнено, то по углам однозначно определяются отношения сторон, что опять-таки геометрически очевидно:

$$a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C^1).$$

С помощью теорем синусов и косинусов можно исчерпать все «основные» случаи решения треугольников, пользуясь только натуральными таблицами, а для возведения многозначных чисел в квадрат и извлечения квадратных корней — таблицами этих действий. Именно, теорема синусов достаточна для решения треугольника: 1) по стороне и двум углам; 2) по двум сторонам и углу против одной из них (как обычно, здесь обращают внимание на двусмысленность угла, определяемого в промежутке  $(0, 180^\circ)$  по синусу). С помощью теоремы косинусов можно решать треугольники: 1) по двум сторонам и углу между ними; 2) по трем сторонам [см. (5)].

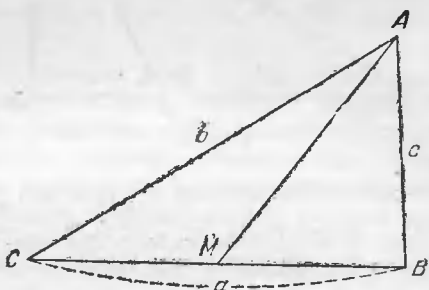


Рис. 4.

Отметим еще возможность нахождения теми же средствами медиан, биссектрис, высот треугольника, предполагая заданными три его стороны:

1) Пусть (рис. 4)  $AM = m_a$  — искомая медиана. Находим по (5)  $\cos C$  и подставляем в полученное из треугольника  $ACM$  равенство

$$m_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} b \cos C = \dots$$

Вспомним, что формулу для медианы обычно выводят, дополняя треугольник до параллелограмма и применяя теорему о сумме квадратов его диагоналей; эта теорема становится теперь излишней.

2) Сохраняем обозначения рис. 4 (хотя теперь он уже плохо отражает условие задачи), и пусть  $AM = \beta_a$  — искомая биссектриса. В треугольнике  $ACM$  легко определяются  $CM = \frac{ab}{b+c}$  и угол  $C$  по (5), после чего

$$\beta_a^2 = b^2 + \frac{a^2 b^2}{(b+c)^2} - 2b \frac{ab}{b+c} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dots = bc \left[ 1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right].$$

3) При обозначениях рис. 4 пусть  $AM = h_a$  — искомая высота. Из треугольника  $ACM$  имеем  $h_a = b \sin C$ , причем  $\cos C$  определяется

<sup>1)</sup> Второй вариант теоремы косинусов не предлагается для включения в обязательный курс.

по (5); значит,  $\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2}$  и т. д. (остаются алгебраические преобразования, обычные при выводе формулы Герона).

Рассмотрим еще несколько примеров приложений. Теорема косинусов позволяет найти модуль  $R$  вектора — равнодействующей двух сил, зная их модули  $F_1$ ,  $F_2$  и угол  $\alpha$  между направлениями сил:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha$$

(обратим внимание на знак  $+$  в последнем члене правой части). Если хотим еще найти углы между направлениями равнодействующей и составляющих, то достаточно применить теорему синусов.

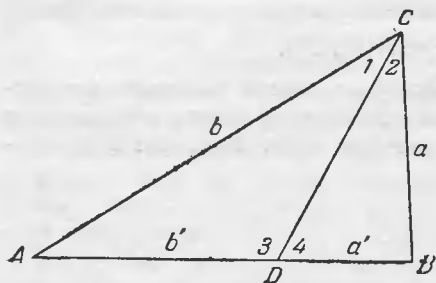


Рис. 5.

Легко (и без проведения вспомогательных линий) доказывается теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника. Пусть на рис. 5  $CD$  — биссектриса, т. е.  $1 = 2$ , остальные обозначения понятны из чертежа. Из треугольников  $ACD$  и  $BCD$

$$b:b' = \sin 3:\sin 1, a:a' = \sin 4:\sin 2.$$

Но  $\sin 3 = \sin 4$ ,  $\sin 1 = \sin 2$ , следовательно,  $a:a' = b:b'$ ,  $a':b' = a:b$ . Небольшое видоизменение этого давно известного доказательства дает теорему о биссектрисе внешнего угла.

Возвращаясь к правильным  $n$ -угольникам, мы можем теперь использовать не только их центральные углы (острые при  $n > 4$ ), но и внутренние (тупые при  $n > 4$ ). Именно из вписанного в круг равнобедренного треугольника с основанием  $a_n$ , боковой стороной  $a_{2n}$ , углом при вершине  $180^\circ - \frac{180^\circ}{n}$  и углом при основании  $\frac{90^\circ}{n}$  находим сначала

$$a_{2n} = a_n : 2 \cos \frac{90^\circ}{n}, \text{ а по теореме косинусов } a_n^2 = 2a_{2n}^2 \left(1 + \cos \frac{180^\circ}{n}\right),$$

откуда

$$a_{2n} = a_n : \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{180^\circ}{n}\right)} \quad (7)$$

или [см. (3)]

$$a_{2n}:a_n = \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{180^\circ}{n}\right)}. \quad (7')$$

Из (7) или (7') легко получаются  $a_3$ ,  $a_{12}$ , а затем и значения  $\cos 22^\circ, 5$ ,  $\cos 15^\circ$ . Отсюда и из (7) находим  $a_{16}$ ,  $a_{24}$  и т. д.

Наконец, в теории площадей должна быть прочно усвоена формула для площади треугольника  $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ , не менее важная при реше-

нии задач, чем  $S = \frac{1}{2} ah$  (из которой получается первая формула).

Полезны также выражения для площади параллелограмма по двум смежным сторонам и углу между ними, для площади любого четырехугольника по двум диагоналям и углу между ними.

Оставляю в стороне приложения к стереометрии, где при решении задач роль тригонометрии давно узаконена. К сожалению, в теоретическом курсе по-прежнему избегают тригонометрии; например, обычно отсутствует важная теорема о площади проекции плоской фигуры на плоскость (не нашел я этой теоремы и в вузовских учебниках геометрии С. А. Богомолова и Д. И. Перепелкина; иное в книге Ж. Адамара, *Элементарная геометрия*, ч. II, изд. 2-е, М., 1951, п. 381).

Таким образом, речь идет о включении всей тригонометрии треугольника (не считая решения треугольников с помощью логарифмо-тригонометрических таблиц) в курс геометрии. Здесь уместно привести несколько историко-библиографических справок. Полвека тому назад один из крупнейших французских математиков и выдающийся деятель математического просвещения Э. Борель включил в свой учебник элементарной геометрии<sup>1)</sup> тригонометрические функции острого и тупого угла, теорему косинусов, некоторые приложения к планиметрии (правильные многоугольники, площадь треугольника) и стереометрии (площадь проекции). Учебник этот, хотя и не получивший широкого распространения в школах Франции, был переведен на несколько языков и оказал значительное влияние на преподавание и на программы. Во всяком случае, известный во Франции того времени ученый и педагог, автор распространенных учебников К. Бурле мог, ссылаясь на официальную программу 1909 г., включить в курс геометрии<sup>2)</sup> тригонометрические функции острого и тупого угла, теоремы синусов и косинусов. Из русских авторов можно назвать А. Горста, который в своем интересном, хотя не безупречном учебнике<sup>3)</sup> вводит тригонометрические функции для углов от 0 до 360° и теорему косинусов. Впрочем, у всех названных авторов геометрические приложения не доведены до объема, намечаемого в этой статье.

В соответствии с заголовком статьи здесь не место детально обсуждать, какие изменения претерпел бы школьный курс математики в целом, если бы были осуществлены изложенные выше предложения. Тем не менее, чтобы читатель не остался неудовлетворенным из-за отсутствия общей перспективы, намечу ее хотя бы в первом приближении и без подробных мотивировок.

Из тригонометрии треугольника осталось не включенным в курс геометрии решение треугольников с помощью логарифмо-тригонометри-

<sup>1)</sup> Э. Борель, *Элементарная математика, ч. II. Геометрия*. Перевод с нем. изд., обработ. П. Штекелем, Одесса, «Матезис», 1912.

<sup>2)</sup> Carlo Bourlet, *Éléments de géométrie*, 2-е изд., Париж, 1910.

<sup>3)</sup> А. М. Горст, *Элементарная геометрия*, СПб—Киев, «Сотрудник», 1911.



ческих таблиц вместе с техникой этих вычислений и специально выводимыми формулами, «удобными для логарифмирования». Этой почти лишенной образовательного (а в век машинной математики и практического) значения трудоемкой главой легко пожертвовать.

Остается гониометрия, точнее: обобщение понятия об угле в ориентированной плоскости; радианная мера; тригонометрические функции числового аргумента, их периодичность (графики); формулы приведения; формулы сложения — вычитания и умножения — деления аргумента на 2; тождественные преобразования тригонометрических выражений; «аркусы»; тригонометрические уравнения. Но ведь хорошо известно, что вся гониометрия может быть построена на чисто аналитическом фундаменте (бесконечные ряды или дифференциальные или функциональные уравнения). В этом отношении она ближе к тому курсу, который в школьной практике называется *алгеброй*, хотя он включает в себя и некоторые вопросы введения в анализ, например изучение трансцендентных функций — показательной и логарифмической. Тригонометрические функции, знакомство с которыми необходимо для общего образования в силу их значения для многих областей математики и физики, также принадлежат к числу трансцендентных. Так не следует ли в преподавании поставить тригонометрические функции рядом с показательной (глубокая связь этих функций обнаруживается с комплексной областью), т. е. включить в условную «алгебру»<sup>1)</sup>. Во всяком случае — не в геометрию: на заблуждения, порождаемые иллюзией об органической зависимости тригонометрических функций от евклидовой геометрии, именно от существования подобных фигур (которых нет ни в геометрии Лобачевского, ни в сферической), не раз указывалось<sup>2)</sup>.

Во всяком случае, то, что стоит сохранить в общеобразовательной школе из традиционного курса тригонометрии (по поводу перечисленных выше гониометрических тем вспомним, что «аркусы» уже исчезают из нашего преподавания, за ними, вероятно, последуют тригонометрические уравнения), не требует наличия этого предмета как отдельного, а легко и с пользой (для геометрии — безусловно) укладывается в рамки двух школьных курсов.

Итак, предлагается наряду с сокращением нынешней программы разделить тригонометрию между геометрией и алгеброй: в геометрию — функции углового аргумента для промежутка  $(0, 2\pi)$ , в алгебру — функции числового аргумента для промежутка  $(-\infty, +\infty)$ .

<sup>1)</sup> Один из убедительных доводов в защиту сохранения здесь главы о комплексных числах — это возможность вывода формул для синуса и косинуса суммы и кратных аргументов с помощью умножения и возведения в степень комплексных чисел, взятых в тригонометрической форме.

<sup>2)</sup> См., например, Н. М. Бескин, Методика геометрии, М.—Л., 1947, стр. 219—220.

# НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ЭЛЕКТРОННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

*А. А. Ляпунов и Г. А. Шестопал*

(Москва)

## Введение

Цель настоящей статьи — дать представление о действии автоматических быстродействующих цифровых вычислительных машин (АБЦВМ). Знакомство с идеями, положенными в основу их устройства и применения, может оказаться полезным для лиц различных специальностей. Мы ограничим наше изложение описанием некоторых математических и логических возможностей АБЦВМ, не затрагивая вопроса о технических средствах, с помощью которых эти возможности осуществляются в реальных схемах и конструкциях.

Современная наука и техника неразрывно связаны с использованием АБЦВМ. Их появление позволило в корне изменить весь стиль вычислительной работы главным образом за счет резкого уменьшения времени выполнения отдельных операций. Если раньше вычислительные задачи, требовавшие миллиона арифметических операций, были уже на грани возможного, то теперь с помощью АБЦВМ нередко решаются задачи с миллиардами арифметических действий.

Современная АБЦВМ представляет собой весьма сложный агрегат. Первой характерной особенностью ее устройства является использование электроники, сделавшее возможным резкое увеличение скорости работы машины. В вычислительных машинах прежних конструкций для производства различных операций применялись механические или электромеханические счетчики, принцип действия которых основан на перемещениях каких-либо деталей (поворот зубчатых колес, движение якоря электромагнитного реле и т. д.). В АБЦВМ все операции сводятся к изменению состояния электронных устройств, что выполняется почти мгновенно. Современная АБЦВМ способна производить десятки тысяч действий в секунду.

Схема, по которой вычислительная задача решается машиной, воспроизводит в известном смысле схему действий человека. Когда человек решает вычислительную задачу «ручным» способом, то он предварительно

составляет (в уме или на бумаге — в зависимости от сложности задачи) некоторый план — *программу вычислений*. В соответствии с этой программой он последовательно выполняет арифметические действия — сначала над исходными данными задачи, а затем над числами, появляющимися в процессе вычислений. При этом обычно возникает необходимость записи ряда промежуточных результатов. Одна часть таких результатов используется непосредственно в следующем шаге вычислений и в дальнейшем оказывается ненужной. Другую же часть промежуточных результатов необходимо сохранять с тем, чтобы использовать ее на более поздних этапах работы (иногда лишь в конце решения). В некоторые моменты, в зависимости от получаемых по ходу вычислений результатов, вычислитель может менять методы расчета (переходить к другим формулам и т. д.). Конечным шагом решения всякой задачи является запись ответа.

Для того чтобы выполнять аналогичные функции, АБЦВМ должна располагать не только устройством для выполнения арифметических действий, но и устройством для «запоминания» исходных данных и необходимых промежуточных результатов.

Другая особенность АБЦВМ, тесно связанная с ее быстродействием, состоит в полной автоматизации всего процесса решения задачи от начала до конца. Без такой автоматизации использование АБЦВМ едва ли было бы целесообразным.

Представим себе на минуту, что машина может выполнять лишь некоторую серию однообразных вычислений, останавливаясь всякий раз перед изменением метода расчета или переходом к вычислению другой группы величин и т. п. Если даже отвлечься от вопроса, каким образом и как быстро исходные данные вводятся в машину и сколько времени затрачивается на ее запуск и остановку, то время, необходимое для чтения промежуточных результатов и для размышления над тем, какое следующее действие должно быть поручено машине, оказывается несравненно больше времени, которое АБЦВМ тратит на выполнение этого действия. Такая схема использования АБЦВМ свела бы на нет все преимущества от ее быстродействия.

Современная АБЦВМ может решать весьма сложные задачи, состоящие из серии вычислений и анализа результатов, не требуя вмешательства человека ни на каком промежуточном этапе. Вся работа АБЦВМ определяется заранее составленной программой (точный смысл этого термина, примененного к машине, выяснится ниже).

После включения АБЦВМ она в соответствии с программой последовательно проводит вычислительный процесс (автоматически меняя его ход там, где это требуется), «выдает» готовый результат и останавливается. При этом для решения задачи, на которое при «ручных» вычислениях потребовались бы годы работы, машина затрачивает лишь несколько часов или даже минут.

Возможности АБЦВМ очень широки и не ограничиваются лишь одними вычислениями. АБЦВМ используются и для решения разнообразных

логических задач: автоматического перевода с одного языка на другой, выполнения бухгалтерских расчетов, экономико-статистического анализа; АБЦВМ используются также для целей автоматического управления производственными процессами, полетом самолета и т. д.

Такая универсальность применения АБЦВМ привела к необходимости развивать специальную прикладную теорию алгоритмов, именно теорию рациональных способов составления программ для АБЦВМ. Эта теория образует теперь отдельную область прикладной математики, носящую название *программирования*.

В настоящее время существует чрезвычайно много различных типов АБЦВМ. Поэтому для простоты изложения мы опишем некоторую *условную вычислительную машину* (УВМ), принципиальные возможности которой характерны и для реальных АБЦВМ. Применительно к этой машине и будут изложены основные идеи и приемы программирования.

Следует отметить, что каждая конкретная машина дает возможность применять специальные приемы программирования, выгодные для использования ее особенностей; естественно, что при описании УВМ такие специальные приемы изложены быть не могут.

В первой части статьи приводится описание схемы и принципа действия УВМ; вторая часть содержит несколько простых примеров программирования математических и логических задач.

## 1. Условная вычислительная машина (УВМ)

### Основные части УВМ

УВМ (так же как и любая АБЦВМ) состоит из трех основных частей: 1) *памяти* (П), снабженной *читающим и пишущим устройством* (ЧУ); 2) *арифметического устройства* (АУ) и 3) *управляющего устройства* (УУ). Кроме того, УВМ имеет устройство для ввода исходных данных и выдачи полученных результатов.

Опишем назначение основных частей УВМ.

Память представляет собой устройство, предназначенное для ввода, хранения и извлечения различной «информации», необходимой для работы машины. К этой информации относятся: исходные числовые данные, промежуточные результаты, окончательные результаты, а также, программа действия машины, представляющая собой описание операций и их последовательности. Информация, вводимая в память, может содержать и другие данные (например, грамматические правила и словарь, как это требуется при переводе с одного языка на другой).

Идея устройства памяти, способной оперировать со столь разнообразной информацией, основана на использовании специальных кодов. С помощью этих кодов самые различные понятия: числа, наименования действий и т. д. — изображаются комбинациями двух символов: «0» и «1». Таким образом, осуществление памяти сводится к созданию систе-



в управляющее устройство, в другую ячейку памяти или в устройство выдачи. При этом прочтение кода, записанного в ячейке, не изменяет ее содержимого. Напротив, когда ЧУ записывает код в некоторую ячейку памяти, то код, содержащийся в этой ячейке раньше, автоматически уничтожается.

Арифметическое устройство (АУ). Вся работа машины разбивается на последовательность *тактов*, каждый из которых состоит в выполнении некоторой элементарной операции над кодами. Эти эле-

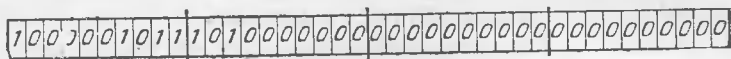


Рис. 2. Изображение числа «— 11, 625».

ментарные операции выполняются в АУ. Всякая АБЦВМ имеет свой набор элементарных операций, определенный назначением и схемой машины.

Список элементарных операций УВМ состоит из четырех групп (см. таблицу на стр. 67). Каждая элементарная операция представляет собой действие над одним или двумя кодами, в результате которого возникает новый код. Если обозначать коды буквами  $x, y, z, \dots$ , то каждая элементарная операция может быть записана символически:  $z = \varphi(x)$  или  $z = f(x, y)$ , где  $\varphi, f$  — символы операции. Остановимся сначала на первых двух группах: 1) *вычислительных операциях* и 2) *логических операциях*.

Арифметических операций в УВМ имеется четыре: сложение, вычитание, умножение и деление. Они состоят в выполнении соответствующих действий над кодами, истолкованными как коды чисел. В случае, если  $x$  и  $y$  действительно представляют собой коды чисел, то арифметические операции имеют обычный смысл. Если же  $x$  или  $y$  представляет собой код какой-нибудь иной информации, то арифметические операции могут быть использованы для преобразования кодов, конкретный смысл которого зависит от содержания кодов  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Такие преобразования кодов, как мы увидим дальше, нередко используются в программах.

Для преобразования кодов служат также и логические операции. К логическим операциям относятся: *логическое сложение, логическое умножение* <sup>1)</sup>, *неэквивалентность, перенос числа и сдвиг.*

Обозначим через  $x_k, y_k, z_k$   $k$ -е разряды кодов  $x, y, z$  ( $k=1, 2, \dots, 40$ ). Говорят, что код  $z$  получен в результате *логического сложения* кодов  $x$  и  $y$  ( $z=x \vee y$ ), если

$$\begin{cases} z_k = 0, \text{ когда } x_k = 0 \text{ и } y_k = 0; \\ z_k = 1 \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

2) Происхождение этих терминов связано с тем, что если единицу называть *истинным высказыванием*, а ноль — *ложным высказыванием*, то приводимые ниже правила действий над разрядами кодов не отличаются от правил алгебры высказываний в математической логике.



причем если  $k < 1$  или  $k > 40$ , то  $z_k = 0$ . Число  $i$  может быть как положительным, так и отрицательным, причем если  $i > 0$ , то сдвиг происходит вправо, а если  $i < 0$ , то влево (рис. 6).

$x$	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
$z$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0

Рис. 6. Сдвиг ( $i=4$ ).

В конце статьи мы несколько подробнее опишем механизм осуществления операции сдвига в УВМ.

Другие элементарные операции, выполняемые АУ, будут описаны в следующем разделе.

Управляющее устройство (УУ) координирует все действия машины. Его функции сводятся к выполнению следующих действий:

- а) включение и настройка АУ для выполнения очередной операции;
- б) пересылка кода из ячейки памяти в АУ;
- в) пересылка кода из АУ в ячейку памяти;
- г) пересылка кода из одной ячейки памяти в другую;
- д) пересылка кода из ячейки памяти в УУ;
- е) пересылка кода из ячейки памяти в устройство выдачи;
- ж) управление последовательностью операций.

Действия УУ определяются так называемыми *приказами*, поступающими туда из памяти машины.

### Приказы и программа

Приказом называется код, изображающий элементарную операцию над кодами:  $z = \varphi(x)$  или  $z = f(x, y)$ . Если  $\varphi$  или  $f$  — вычислительные операции, то приказ называется *вычислительным*.

Кроме вычислительных, существуют *управляющие приказы* (см. ниже).

Рассмотрим способ записи основных приказов. Каждый код, изображающий приказ (*код приказа*), расчленяется на четыре группы по 10



Рис. 7. Схема приказа.

разрядов в каждой группе (рис. 7). Первая из этих групп называется *кодом операции*. Туда помещается номер (код) элементарной операции, выполняемой машиной. Три последующие группы разрядов называются *адресами*. Адрес — это номер ячейки памяти, записанный как 10-разрядное двоичное число. В первый адрес (I) заносится номер ячейки, в которой находится код  $x$ , во второй адрес (II) — номер ячейки



с кодом  $у$ , в третьем адресе (III) — номер ячейки, куда должен быть записан результат — код  $z$ . Иногда часть адресов не используется. Например, если операция, выполняемая приказом, имеет вид  $z = \varphi(x)$ , то не используется второй адрес.

Все приказы, так же как и остальные коды, хранятся в памяти машины. Каждому приказу присваивается номер той ячейки памяти, в которой он содержится. Последовательность перенумерованных приказов называется *программой*.

Посмотрим, что происходит, когда в УУ поступает вычислительный приказ. Код операции передается в АУ и настраивает его на выполнение данной операции. Первый и второй адреса (если  $z = f(x, y)$ ) поступают в УУ. После этого коды  $x$  и  $y$ , хранимые в ячейках памяти, указанных в первом и втором адресах, передаются в АУ. Далее в АУ осуществляется операция  $z = f(x, y)$ . Наконец, в ЧУ поступает третий адрес, в результате чего код  $z$ , выработанный в АУ, поступает в ячейку, номер которой был в этом адресе указан.

Остановимся теперь на роли управляющих приказов. Рассмотрим сначала приказы *условной передачи управления* (УП).

Основное правило, определяющее порядок работы машины, состоит в том, что за приказом с номером  $a$  выполняется приказ с номером  $a + 1$ . Существует, однако, ряд случаев, когда это естественное правило может быть нарушено. Именно это случается, когда в процессе решения наступает момент, начиная с которого выбор очередной операции зависит от результатов предшествующих операций. При составлении программы должны быть специально оговорены такие «разветвления» путей дальнейших вычислений и указаны правила выбора нужного пути. На языке программы это означает, что из совокупности приказов, содержащих коды возможных очередных операций, должен быть выбран какой-нибудь один определенный приказ. Такой выбор одного приказа из нескольких всегда может быть сведен к последовательным выборам одного из *двух* приказов. Инструментом, осуществляющим выбор одного из двух приказов, и является приказ УП.

В коде приказа УП заключено в общем случае следующее содержание: «если между двумя кодами  $x$  и  $y$ , находящимися в ячейках, указанных в первом и втором адресе, выполняется некоторое отношение  $M$ , указанное в коде операции, то очередным должен стать приказ, номер которого указан в третьем адресе; если же отношение  $M$  не выполнено, то вслед за данным приказом УП должен исполняться приказ, следующий по порядку номеров».

Существует несколько типов приказов УП в зависимости от того, какое именно отношение  $M$  проверяется. Мы включим в список элементарных операций УВМ четыре типа приказов УП, хотя принципиально можно было бы ограничиться лишь одним. (Такое ограничение привело бы к некоторому усложнению программ.)

В приказе УП<sub>1</sub> проверяется отношение « $x < y$ », иначе говоря, приказ УП<sub>1</sub> имеет следующее содержание «если код  $x$  меньше кода  $y$ , то

выполняется приказ, номер которого указан в третьем адресе, если же  $x \geq y$ , то должен выполняться очередной приказ».

Схема приказа УП<sub>1</sub> изображена на рис. 8. Через  $a$  на этой схеме обозначен номер ячейки, содержащей код  $x$ , через  $b$  — номер ячейки с кодом  $y$ , через  $c$  — номер нужного приказа.



Рис. 8. Схема приказа УП<sub>1</sub>.

В приказе УП<sub>2</sub> проверяется отношение « $x \neq y$ », в приказе УП<sub>3</sub> — отношение « $x = y$ », в приказе УП<sub>4</sub> — отношение « $|x| > |y|$ ».

Следует заметить, что при всех проверках, содержащихся в приказах УП, коды  $x$  и  $y$  истолковываются как коды чисел. Если  $x$ ,  $y$  — действительно числовые коды, то такое сравнение имеет обычный смысл, если же  $x$ ,  $y$  содержат другую информацию, то в зависимости от ее характера проверка, осуществляемая приказом УП, может иметь то или иное конкретное содержание.

Проверка отношений между кодами  $x$  и  $y$  производится АУ.

Кроме приказов УП, в программу могут быть включены приказы безусловной передачи управления (БП), выполняющие следующую функцию: «если приказ БП поступил в УУ, то непосредственно после него в УУ передается приказ, номер которого указан в третьем адресе приказа БП». (Первый и второй адреса в приказе БП не используются.)

Приказы передачи управления составляют третью группу элементарных операций УВМ.

Среди прочих управляющих приказов, образующих четвертую группу элементарных операций, отметим приказ *останова* (ОСТ), который останавливает машину, и приказ *печати* (ПЕЧ), выдающий наружу содержимое ячейки памяти, указанной в первом адресе этого приказа.

Отметим еще одну особенность составления программ. При программировании стремятся обычно к тому, чтобы по возможности использовать одну и ту же часть программы многократно, изменяя адреса используемых данных. Для этой цели в программу включаются так называемые *приказы переадресации*. Приказы переадресации осуществляют изменение адресов выполненных ранее приказов с тем, чтобы в дальнейшем эти приказы могли быть снова выполнены, но уже над кодами, записанными в ячейках с новыми адресами. Подробнее эта особенность программирования будет пояснена на примерах<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> В УВМ операции переадресации могут быть выполнены с помощью операций сложения и вычитания. Во многих реально существующих АБЦВМ числа изображаются иначе, чем в УВМ; в связи с этим для переадресации требуются специальные операции.

Кроме вычислительных и управляющих приказов, программа содержит обычно еще и *вспомогательные коды*: исходные числовые данные задачи и числа, используемые при управлении. Например, при решении задачи итерационным методом приказ УП может сравнить код  $|x|$ , характеризующий точность решения, с заданным положительным числом  $\epsilon$  и в зависимости от результата сравнения передать управление начальному приказу для повторения процесса итерирования или заставить машину двигаться дальше. Код числа  $\epsilon$  является в этом случае вспомогательным кодом.

В заключение этого раздела приведем список всех элементарных операций УВМ. По-прежнему через  $x$  и  $y$  мы будем обозначать коды, хранящиеся в ячейках, номера которых указаны в первом и втором адресах приказов; через  $z$  — код, выработанный в АУ и помещаемый в ячейку, номер которой указан в третьем адресе приказа; через  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $z_k$  — соответственно  $k$ -е разряды чисел  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

При программировании приказы записываются по порядку номеров. Вместо кода операции пишут обычно ее обозначение. Номера ячеек в адресах записывают в десятичной системе.

Пусть, например, четвертый приказ программы состоит в следующем: «код, записанный в 13-й ячейке, разделить на код, записанный в 15-й ячейке, и результат записать снова в 15-ю ячейку».

Запись такого приказа имеет вид:

4.	:	13	15	15
----	---	----	----	----

Перед вводом программы в память машины приказы кодируются по описанному выше правилу. Только что приведенный приказ переходит в следующий код (рис. 9).

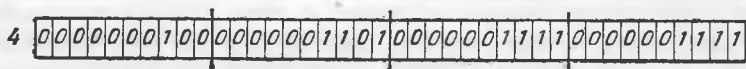


Рис. 9. Изображение приказа 4 в виде кода.

После того как программа введена в память УВМ и начальный приказ передан в УУ, происходит последовательное автоматическое выполнение приказов. После вычислительного приказа выполняется следующий по порядку приказ программы. После приказа УП выполняется либо приказ, адрес которого указан в третьем адресе, либо следующий по порядку. При появлении в УУ приказа ПЕЧ выдается наружу некоторое число. Это происходит до появления в УУ приказа ОСТ.

Возможен также и *аварийный останов*. Он происходит в том случае, если операция, диктуемая УУ, оказывается невыполнимой. Это указывает либо на ошибку в программе, либо на ошибку (сбой) в работе машины.

## Список операций УВМ

п.п. №	Название операции	Обозначение	Определение	Числовой код операции
I. Арифметические операции <sup>1)</sup>				
1	Сложение	+	$x + y = z$	1 <sup>2)</sup>
2	Вычитание	-	$x - y = z$	10
3	Умножение	×	$x \times y = z$	11
4	Деление	:	$x : y = z$	100
II. Логические операции (поразрядные)				
1	Логическое сложение	∨	$x_k \vee y_k = \text{Max}(x_k, y_k) = z_k$	1000
2	Логическое умножение	∧	$x_k \wedge y_k = \text{min}(x_k, y_k) = z_k$	1001
3	Неэквивалентность	≠	$x_k \neq y_k = (\bar{x}_k \wedge y_k) \vee (x_k \wedge \bar{y}_k) = z_k$ <sup>3)</sup>	1010
4	Перенос числа	ПЧ	$x = z$	1011
5	Сдвиг	→	$x_k = z_{k+i}$	1100 <sup>4)</sup>
III. Операции передачи управления				
1	Безусловная передача управления	БП	Управление передается по III адресу: всегда	10000
2	Условная передача управления 1	УП <sub>1</sub>	если $x < y$	10001
3	Условная передача управления 2	УП <sub>2</sub>	" $x \neq y$	10010
4	Условная передача управления 3	УП <sub>3</sub>	" $x = y$	10011
5	Условная передача управления 4	УП <sub>4</sub>	" $ x  >  y $	10100
IV. Прочие операции управления				
1	Печатать	ПЕЧ	отпечатать $z$	11000
2	Останов	ОСТ	остановить машину	11111

<sup>1)</sup>  $x$ ,  $y$  и  $z$  рассматриваются как числа. Предполагается обычное округление результата. Если результат выходит за пределы ячейки, машина останавливается.

<sup>2)</sup> Мы пишем просто 1 вместо цифр 0000000001, стоящих в коде операции.

<sup>3)</sup>  $\bar{y}$  обозначает отрицание  $y$ : если  $y=1$ , то  $\bar{y}=0$ , и наоборот.  $z_k = x_k \neq y_k$  т. е.  $z_k=1$ , если  $x_k \neq y_k$ , и  $z_k=0$ , если  $x_k = y_k$ .

<sup>4)</sup> Числовой код выражает только символ самой операции сдвига; количество разрядов, на которое производится сдвиг, кодируется во втором адресе приказа, осуществляющего сдвиг (подробнее это будет пояснено ниже).

## II. Примеры программ

Рассмотрим несколько примеров простых программ.

### 1. Пример программы для вычисления квадратов последовательных целых чисел от 1 до $n$

В этой программе должны быть предусмотрены следующие действия: а) вычисления квадратов  $n$  последовательных целых чисел; б) накопление этих чисел в заранее заготовленных  $n$  ячейках памяти; в) автоматическая остановка машины после окончания этой работы.

Программа<sup>1)</sup>:

1.	+	7	8	7
2.	×	7	7	10
3.	+	2	9	2
4.	УП <sub>1</sub>	2	6	1
5.	ОСТ			
6.	×	7	7	$10 + n$
7.	«0»			
8.	«1»			
9.	0	0	0	1

Таким образом, программа разместилась в девяти ячейках памяти; окончательные результаты (квадраты чисел) будут накапливаться в ячейках 10, 11, 12, ...,  $10 + (n - 1)$ .

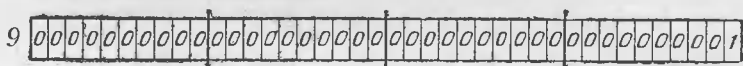


Рис. 10. Девятая ячейка памяти.

Перед началом работы машины в 7-й ячейке помещается число 0, в процессе работы там будут появляться другие числа. В 8-й ячейке помещается число 1; в 9-й ячейке помещен приказ, в котором во всех разрядах, кроме последнего разряда третьего адреса, стоят нули; в III адресе записано число 1 (рис. 10).

Работа этой программы протекает следующим образом.

Выполняется приказ 1: «к коду, записанному в ячейке 7, прибавить код из ячейки 8 и поместить результат снова в ячейку 7».

Таким образом, в ячейке 7 появится число 1 ( $0 + 1 = 1$ ).

<sup>1)</sup> Помещенные в 7-й и 8-й ячейках знаки «0» и «1» обозначают коды чисел 0 и 1.

Выполняется приказ 2. В ячейке 10 появится число 1 ( $1 \times 1 = 1$ ).  
Выполняется приказ 3. В ячейке 2 появится приказ:

$\times$	7	7	11
----------	---	---	----

Действительно, код операции и первые адреса ячейки 9 содержат нули. Поэтому код операции и первые два адреса приказа 2 не изменятся.

Приказ 3 есть приказ переадресации (вычислительная операция не над кодами чисел, а над кодами приказов). Этот приказ подготавливает приказ 2 к тому, чтобы при его очередном выполнении результат указанной в нем операции (получение квадрата числа 2) записывался в новую ячейку. Использованное при этом сложение приказов нужно понимать как обычное сложение числовых кодов.

Выполняется приказ 4. Это приказ УП<sub>1</sub>. Сравнивается содержимое ячеек 2 и 6. Коды, содержащиеся в этих ячейках, истолковываются при этом как числа. До тех пор, пока «число», хранящееся в ячейке 6, больше, чем «число», хранящееся в ячейке 2, происходит передача управления ячейке 1. Сравнение здесь нужно для того, чтобы проверить, не решена ли задача до конца. Передача управления позволяет снова использовать ту же программу для дальнейшего решения задачи.

Затем снова выполняются приказы 1—4. Приказ 1 служит теперь для вычисления нового значения числа, возводимого в квадрат. При этом в ячейке 2 появится приказ:

2.	$\times$	7	7	12
----	----------	---	---	----

в ячейке 7 появится число 2, а в 11-ю ячейку попадет квадрат второго целого числа — 4.

Приказ 4 снова передает управление приказу 1. После нового выполнения приказов 1—4 содержимое изменяемых ячеек станет:

2.	$\times$	7	7	13
7.			«3»	
12.			«9»	

Это будет продолжаться до тех пор, пока в ячейке 2 не окажется приказ

$\times$	7	7	$10 + n$
----------	---	---	----------

тогда приказ 4 передаст управление приказу 5, который остановит машину. В ячейках, начиная от 10 до  $10 + (n - 1)$ , окажутся записанными квадраты  $n$  последовательных натуральных чисел.

2. Пример программы для вычисления  $e^x$ 

Рассмотрим ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Будем вычислять частные суммы этого ряда и будем вести счет до тех пор, пока очередной член не станет по модулю меньше или равен некоторому заданному числу  $\epsilon > 0$ .

Предварительно преобразуем ряд следующим образом:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

где  $u_0 = 1$  и  $u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} \cdot x$ .

Заполним следующие ячейки:

В ячейке с номерами 1—9 запишем программу для решения этой задачи;

в ячейку с номером 10 запишем число 0,

» » » » 11 » »  $x$ ,

» » » » 12 » » 1,

» » » » 16 » »  $\epsilon$ ;

ячейки 13 и 14 сохраним в качестве так называемых «рабочих ячеек», в которых будут записываться промежуточные результаты. Окончательный результат получится в ячейке 15.

Программа:

1.	ПЧ	10	—	13
2.	ПЧ	10	—	15
3.	ПЧ	12	—	14
4.	+	15	14	15
5.	+	13	12	13
6.	:	14	13	14
7.	×	14	11	14
8.	УП <sub>4</sub>	14	16	4
9.	ОСТ			

Поясним работу этой программы.

В результате выполнения приказов 1—3 в ячейки 13 и 15 заносится число 0 (это необходимо потому, что до начала работы машины в этих ячейках могли стоять какие угодно числа), а в ячейку 14 — число 1, равное значению нулевого члена ряда  $u_0$ .

4-й приказ прибавляет к содержимому 15-й ячейки (числу 0) значение  $u_0$ ; теперь в 15-й ячейке будет тоже стоять  $u_0$  (начальное значение суммы ряда).

5-й приказ прибавляет единицу к содержимому 13-й ячейки; таким образом, в 13-й ячейке стоит теперь тоже 1.

6-й приказ производит деление  $u_0$  на 1 и запись результата в 14-ю ячейку.

7-й приказ производит вычисление первого члена ряда  $u_1 = \frac{u_0}{1} \cdot x$ , который снова помещается в 14-ю ячейку.

8-й приказ производит сравнение  $|u_1|$  с числом  $\epsilon$  и передачу управления 4-му приказу в случае, если  $|u_1| > \epsilon$ . В этом случае снова выполняются все приказы от 4-го до 8-го. (Если уже  $u_1$  по модулю не превосходит  $\epsilon$ , то выполняется приказ 9 и машина остановится.)

При вторичном выполнении приказов 4—8:

в 15-й ячейке появится число  $u_0 + u_1$  (4-й приказ),

» 13-й » » » 2 (5-й » ),

» 14-й » » сначала число  $\frac{u_1}{2}$  (6-й приказ), а затем

число  $\frac{u_1}{2} \cdot x = u_2$  (7-й приказ).

Таким образом, в следующих циклах в ячейке 14 будут последовательно появляться члены нашего ряда:  $u_0, u_1, u_2, \dots$ ; в ячейке 13 — номера этих членов: 0, 1, 2, 3, ...; а в ячейке 15 — значения последовательных частных сумм ряда, дающих приближенное значение  $e^x$ . Работа машины будет происходить до тех пор, пока (как это требуется по условию задачи) очередной вычисляемый член ряда не станет по модулю меньше или равен  $\epsilon$ . После того как это произойдет, машина автоматически остановится. Окончательный ответ будет помещен при этом в 15-й ячейке памяти.

### 3. Пример программы, использующей логические операции

Рассмотрим структуру приказа сдвига УВМ. В первом адресе этого приказа записан адрес ячейки, содержащей сдвигаемый код. Во втором адресе помещается некоторое целое число « $\beta$ ». Это число, записанное в двоичной форме и имеющее не более семи отличных от нуля разрядов, кодирует величину и направление сдвига. Всегда можно считать, что  $\beta = 2^i + i$ , где  $-2^6 \leq i \leq 2^6 - 1$ . При этом под  $|i|$  понимают число разрядов, на которые происходит сдвиг;  $i > 0$  означает сдвиг вправо, а  $i < 0$  — сдвиг влево. Так как величина  $i$  может изменяться в пределах от  $-39$  до  $+39$ , то очевидно, что любой сдвиг может быть закодирован таким способом. (Числом разрядов, меньших чем 7, уже нельзя было бы обойтись.)

Число  $\beta_0 = 2^0$  обозначает, таким образом, нулевой сдвиг. Единица в старшем разряде свидетельствует о сдвиге вправо, а нуль — о сдвиге влево.



Для примера на рис. 11, *а*, *б* изображены ячейки памяти, содержащие приказы сдвига содержимого 326-й ячейки на 12 разрядов вправо (*а*) и влево (*б*).

Указанный способ кодирования величины сдвига удобен тем, что он дает возможность менять величину и направление сдвига путем использования арифметических операций сложения и вычитания. Именно,

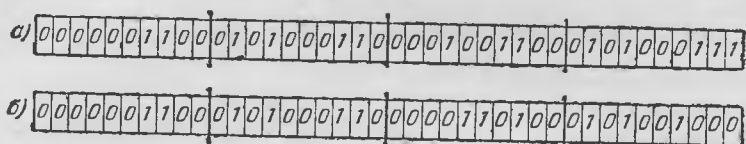


Рис. 11. *а* — приказ сдвига содержимого ячейки № 326 на 12 разрядов вправо (результат записан в ячейке № 327); *б* — приказ сдвига содержимого ячейки № 326 на 12 разрядов влево (результат записан в ячейке № 328).

чтобы произвести дополнительный сдвиг на  $j$  единиц вправо (влево), нужно к ячейке, содержащей приказ сдвига, прибавить (вычесть)  $j$  единиц II адреса.

Так, например, чтобы произвести дополнительный сдвиг содержимого ячейки № 326 (первоначальный сдвиг которой на 12 разрядов вправо изображен на рис. 11, *а*) на восемь разрядов вправо, достаточно к ячейке, изображающей приказ сдвига, прибавить восемь единиц второго адреса, а чтобы произвести новый дополнительный сдвиг на

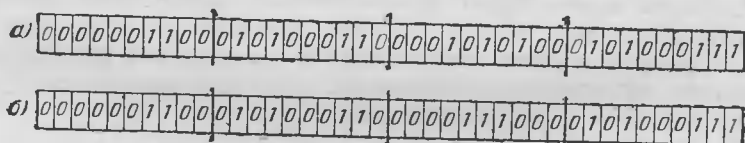


Рис. 12. *а* — дополнительный сдвиг ячейки № 326 на восемь разрядов вправо; *б* — второй дополнительный сдвиг ячейки № 326 на 28 разрядов влево.

28 разрядов влево, достаточно вычесть от содержимого полученной ячейки 28 единиц второго адреса. Содержимое полученных в результате ячеек изображено на рис. 12, *а*, *б*.

Будем программировать следующую «игру» с двумя «игроками». Рассматривается два 40-разрядных кода. Первый код  $A$  выбирается произвольно и записывается в некоторую ячейку памяти  $a$ . Все разряды второго кода  $C$ , кроме  $k$ -го, равны нулю;  $k$ -й разряд равен единице. Этот код записывается в ячейку с номером  $c$ .

Каждый «ход» игры состоит в том, что код  $C$  сдвигается на некоторое число разрядов. Оно получается следующим образом. В коде  $A$  выделяется семь младших разрядов его второго адреса. Полученное таким образом число  $\beta$  и принимается за код нужного сдвига. (Это

может быть сдвиг влево или вправо — в зависимости от того, стоит ли в старшем из этих семи разрядов 0 или 1.) Перед следующим «ходом» производится сдвиг кода  $A$  на один разряд вправо и новое выделение (вообще говоря, других) семи младших разрядов его второго адреса, которые снова считаются кодом сдвига  $C$  для следующего «хода» игры. Таким образом, следующим «ходом»  $C$  будет сдвигаться, вообще говоря, на другое число разрядов (и, может быть, даже в другую сторону). «Игра» кончается тогда, когда в коде  $C$  единица, первоначально стоявшая на  $k$ -м месте, выйдет за пределы ячейки. Если этот выход произойдет с правого конца ячейки, то выигравшим считается первый игрок, если же единица выйдет за пределы ячейки с левой стороны, то выигравшим считается второй игрок.

Приведем программу, по которой машина могла бы провести эту игру, указать выигравшего и остановиться, когда игра кончится.

Пусть в ячейке  $a$  записан код  $A$ ,

» » »  $b$  » число, состоящее из единиц в семи младших разрядах второго адреса и нулей на остальных местах,

» » »  $c$  » код  $C$ ,

» » »  $d$  » число нуль,

» » »  $e + 1$  закодирован нулевой сдвиг, т. е. в ее втором адресе записано число  $2^6$ , а на остальных местах стоят нули.

Ячейка  $f$  имеет следующее строение:  $f \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & c & 0 & c \\ \hline \end{array}$

Последовательность приказов может быть записана в следующем виде:

1.	$\wedge$	$a$	$b$	$e$	— в ячейке $e$ выделяется только второй адрес кода $A$ (на остальных местах появятся нули).
2.	$+$	$f$	$e$	3	— после выполнения этого приказа в 3-й ячейке появится приказ сдвига содержимого ячейки $c$ на необходимое по условию игры число разрядов.
3.					
4.	$\rightarrow$	$a$	$2^6 + 1$	$a$	— производится сдвиг кода $A$ на один разряд вправо.
5.	УП <sub>1</sub>	$d$	$c$	1	— выясняется, не кончилась ли «игра», т. е. не обратился ли код $C$ в нуль; если это не так, то «игра» продолжается и снова выполняется 1-й приказ.

Следующие приказы выполняются только после фактического окончания «игры», при их помощи определяется «выигравший».

6.	$\wedge$	3	$e+1$	$h$	— выясняется направление последнего сдвига: если он был вправо, то в ячейке $h$ появится единица; если он был влево, то в ячейке $h$ появится нуль.
7.	ПЕЧ	$h$			— выдача наружу содержимого ячейки $h$ , что дает возможность установить «выигравшего»: если будет напечатана 1, то выиграл первый игрок, если нуль — то выиграл второй игрок.
8.	ОСТ				

В заключение приведем без подробных комментариев еще один пример программы.

#### 4. Программа для вычисления значений многочлена по схеме Горнера

Рассмотрим многочлен

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 =$$

$$= (\dots((0 + a_n)x + a_{n-1})x + \dots + a_1)x + a_0.$$

Мы будем обозначать адреса некоторых ячеек латинскими буквами.

Программа для вычисления операции многочлена

№ ячейки	Приказы				№ ячейки	Вспомогательные коды			
	Код	I	II	III		Хранимые числа			
1.	ПЧ	$c$	—	$a$	$c$	$a_n$			
2.	$\times$	$a$	$d$	$a$	$c+1$	$a_{n-1}$			
3.	$+$	$a$	$c+1$	$a$	$\dots$	$\dots$			
4.	$+$	3	$d+2$	3	$c+n$	$a_0$			
5.	УП <sub>2</sub>	3	$d+1$	2	$d+1$	Код	I	II	III
6.	ОСТ				$d+2$	$+$	0	$c+n+1$	$a$
						0	0	1	0

В ячейках  $c, \dots, c+n$  стоят коэффициенты многочлена; в ячейке  $d$  помещается значение аргумента  $x$ ; в ячейке  $a$  появляется искомое значение многочлена  $f(x)$ .

## МОТИВЫ ДЛЯ РАБОТЫ В ОБЛАСТИ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

*Дж. Тодд*  
(J. Todd, США)

От редакции. Статья Дж. Тодда<sup>1)</sup> является беглым обзором различных вопросов из области численного анализа. Ее назначение состоит в том, чтобы показать, насколько эта область разнообразна и как много в ней красивых математических проблем, в значительной мере еще не решенных. Статья не очень легкая по своему содержанию и требует от читателя некоторого напряжения<sup>2)</sup>. В ней затронуты многие вопросы, связанные с эксплуатацией автоматических машин. Ценность статьи Тодда заключается в том, что она может содействовать возбуждению интереса к математической проблематике, связанной с вычислительными машинами.

Профессия исследователя в области численного анализа всё еще не настолько популярна, чтобы ее выбирали по собственному побуждению. В самом деле, несмотря на то, что это одна из самых старых профессий, она только сейчас начинает становиться уважаемой. Многие из тех, кто сейчас работает в этой области, были в большей или меньшей степени вовлечены в нее во время первой или второй мировой войны или позже. Эта статья посвящена вопросу о том, почему же мы остаемся работать в этой области и не вернулись к нашим прежним интересам.

Ответ состоит в том, что численный анализ является той привлекательной областью, где могут быть плодотворно использованы матема-

---

<sup>1)</sup> Motivation for Working in Numerical Analysis, Communications on Pure and Applied Mathematics, т. VIII, № 1, февраль, 1955. Статья была переведена на немецкий язык со значительными дополнениями, сделанными Е. Камке (Jahresberichte der Deutsch. math. Vereinigung 58, 1955, стр. 1). Эти дополнения включены в настоящий перевод. С другой стороны, здесь сделаны некоторые сокращения, в основном относящиеся к библиографии, содержащей много источников, мало доступных нашему читателю.

<sup>2)</sup> Отметим, что недавно вышли и в ближайшее время выходят из печати монографии, подробно излагающие вопросы, затронутые в этой статье: Китов, Цифровые вычислительные машины, М., 1956; Ф. М. Морз и Д. Е. Кимбелл, Методы исследования операций, М., 1956; «Автоматы», сборник под ред. К. Шеннона и Дж. Маккарти; Д. Блекуэлл и М. Гиршик, Теория игр и статистических решений; Н. Винер, Кибернетика, И. Е. Полетаев, Сигнал и др.

тики почти всех специальностей, и что многие из его ветвей приносят непосредственную пользу. Укажем на приложения функционального анализа, разработанные русской математической школой, руководимой Канторовичем<sup>1)</sup>. Из работ другого направления напомним исследования в области аналитической теории чисел Ламера и Радемахера, за которыми последовало вычисление Мак-Магоном функции  $\pi(n)$ <sup>2)</sup>, выполненное по Харди и Рамануджану.

Прежде чем начать рассмотрение некоторых разделов численного анализа, сделаем несколько замечаний общего характера.

Мы часто проводим различие между классическим и современным численным анализом, связывая последний по существу с эксплуатацией автоматических быстродействующих вычислительных машин. Конечно, между этими разделами нельзя провести резких границ; как мы увидим дальше, широкое поле деятельности открывается как в области классического, так и в области современного численного анализа.

Кроме тщательно продуманных и взвешенных исследований, которые можно считать характерными для современного численного анализа, имеется большое количество работ, связанных с процессом вычисления и по необходимости имеющих экспериментальный или эмпирический характер. При решении задач повышенной трудности обычно не удается получить точную оценку погрешности. Необходимо вместо этого иметь уверенность, основанную, с одной стороны, на опыте уже решенных задач подобного рода, а с другой стороны, на четком понимании существа рассматриваемой задачи. Для пояснения этого замечания обратимся к примерам. Интегрирование системы 20 или большего числа дифференциальных уравнений первого порядка может быть выполнено численно по какому-либо известному методу. Сложность получения оценки ошибки, даже если не учитывать того обстоятельства, что в ходе вычислений у чисел сохраняется конечное число десятичных (или двоичных) знаков, становится ясной из работы Бибераха<sup>3)</sup>. Сложность анализа устойчивости решения системы 14 уравнений видна из работы Меррея<sup>4)</sup>. Далее, в работах Неймана, Голдстейна и Тьюринга<sup>5)</sup> произведено точное вычисление полной ошибки для задачи об обращении матрицы.

<sup>1)</sup> Л. Канторович, Функциональный анализ и его приложения к математике, Успехи матем. наук, т. III, 1948, стр. 89—105.

<sup>2)</sup> Функция  $\pi(n)$  — число простых чисел, не превосходящих  $n$ . (Примечание редакции.)

<sup>3)</sup> L. Bieberbach, On the remainder of the Runge-Kutta formula in the theory of ordinary differential equations, ZS. angew. Math. Physik 2, 1951, стр. 233—248.

<sup>4)</sup> F. J. Murray, Planning and error considerations for the numerical solution of a system of differential equations on a sequenced calculator, Math. Tables and Other Aids to Computation 4, 1950, стр. 133—144.

<sup>5)</sup> J. von Neumann and H. H. Goldstine, Numerical inverting of matrices of high order, Bull. Amer. Math. Soc. 53, 1947, стр. 1021—1097; Proc. Amer. Math. Soc. 2, 1951, стр. 188—202. A. M. Turing, Rounding-off errors in matrix processes, Quart. J. Mech. Appl. Math. 1, 1948, стр. 287—308.

Исследователю в области численного анализа необходимо иметь представление о точности получаемых результатов. Например, рассматривая конформное отображение эллипса на круг, выполненное с помощью некоторого процесса, он может делать экстраполяцию на случаи областей, имеющих форму, близкую к эллипсу. С одной стороны, ему необходимо на примерах со случаями, в которых известно точное решение, убедиться в реалистичности полученной из общего рассмотрения оценки ошибки<sup>1)</sup>. С другой стороны, он должен посвятить свое время также построению и исследованию неблагоприятных примеров с тем, чтобы противодействовать всякой тенденции к слишком широкой экстраполяции<sup>2)</sup>.

Главная часть этой статьи посвящена рассмотрению ряда вопросов численного анализа, которые кажутся нам привлекательными. На этих вопросах, выбранных из широко известных областей, мы хотим осветить некоторые технические стороны, а также указать ряд достигнутых результатов. Наш выбор определяется также и нашим убеждением о нежелательности разделения теоретического и практического применения некоторых из описанных технических приемов.

### 1. Вычисление полиномов

Каков наилучший путь вычисления значений полиномов вида

$$f(x) = a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

для ряда произвольно расположенных значений  $x$ ? [Если требуется вычислить значения  $f(x)$  для ряда равномерно расположенных значений  $x$ , то удобным может быть построение таблицы  $f(x)$  по ее разностям.] Обычный ответ на этот вопрос состоит в применении рекуррентной схемы

$$f_0 = a_0, \quad f_{r+1} = x f_r + a_{r+1} \quad (r = 0, 1, \dots, n-1),$$

идущей от Ньютона, но приписываемой обычно Горнеру. На этом пути мы получаем значение  $f(x)$  при помощи  $n$  сложений и  $n$  умножений. Является ли этот алгоритм наилучшим из возможных? Рассмотрим два способа вычисления полинома

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2.$$

Если мы вычислим последовательно

$$2x, \quad x^2, \quad 3x^2, \quad 1 + 2x + 3x^2,$$

то нам понадобится три умножения и два сложения по сравнению с двумя умножениями и двумя сложениями, необходимыми при исполь-

<sup>1)</sup> См. J. Todd, On the condition of matrices, II, Arch. d. Math. 5, 1954, стр. 249—257.

<sup>2)</sup> См. J. Todd, The condition of the finite segments of the Hilbert matrix, там же, стр. 109—116.

зовании указанного выше алгоритма, именно:

$$3x, 3x + 2, x(3x + 2), x(3x + 2) + 1.$$

Эта задача о нахождении алгоритма для вычисления значений полинома с минимальным числом операций была поставлена как задача абстрактной алгебры Островским<sup>1)</sup>; он показал, что вышеуказанный алгоритм действительно является наилучшим для полиномов не выше четвертой степени. Другой путь к решению этой задачи был указан недавно Моцкинским<sup>2)</sup>. Не ограничиваясь лишь рациональными процессами, он показал, что практически более экономные алгоритмы могут быть указаны для больших значений  $n$  в том случае, если требуется получить достаточно большое количество значений  $f(x)$ . Мы дадим сейчас простой пример для случая  $n=6$ . Рассмотрим вычисление значений полинома

$$P = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F.$$

Введем в рассмотрение полиномы

$$P_1 = x(x + a), P_2 = (P_1 + x + b)(P_1 + c), P_3 = (P_2 + d)(P_1 + e)$$

и определим  $a, b, c, d, e$  и  $f$  так, чтобы  $P_3 + f$  тождественно равнялось  $P$ . Это может быть сделано при помощи решения системы линейных уравнений и одного квадратного уравнения. Такое вычисление производится раз навсегда; после этого  $P$  может быть вычислено в результате только трех умножений; это дает значительную экономию по сравнению с другими процессами в том случае, если требуется вычислять  $P$  для достаточно большого количества значений  $x$ .

Опишем подробнее ход вычислений. Приравнивая коэффициенты полиномов  $P$  и  $P_3 + f$ , получим:

$$3a + 1 = A, \quad (1.1)$$

$$3a^2 + 2a + b + c + e = B, \quad (1.2)$$

$$a^3 + a^2 + 2ab + 2ac + 2ae + c + e = C, \quad (1.3)$$

$$a^2b + a^2c + a^2e + ac + ae + bc + be + ce + d = D, \quad (1.4)$$

$$abc + abe + ace + ad + ce = E, \quad (1.5)$$

$$ebc + de + f = F. \quad (1.6)$$

Из (1.1) находим  $a$ . После этого мы можем записать (1.2) и (1.3) в виде

$$b + c + e = B', \quad (1.2')$$

$$2a(b + c + e) + c + e = C' \quad (1.3')$$

<sup>1)</sup> A. M. Ostrowski, On two problems in abstract algebra connected with Horner's rule, Studies presented to R. von Mises, Academic Press, New York, 1954, стр. 40—48.

<sup>2)</sup> T. S. Motzkin, Evaluation of polynomials и Evaluation of rational functions, Bull. Amer. Math. Soc., 1955.

(мы используем заглавные буквы со штрихами для обозначения новых известных нам констант). Подставляя (1.2') в (1.3'), получим

$$c + e = C'. \quad (1.3'')$$

Это уравнение вместе с уравнением (1.2') позволяет нам определить значение  $b$ . Подставляя теперь известные уже значения  $a$ ,  $b$ ,  $c + e$  в уравнение (1.4), мы получим:

$$d + ce = D'. \quad (1.4')$$

Подставляя  $a$ ,  $b$ ,  $c + e$ ,  $d + ce$  в (1.5), найдем, что

$$ce = E'. \quad (1.5')$$

Это позволяет нам определить значение  $d$  из (1.4'). Теперь из (1.3'') и (1.5') можно, решив квадратное уравнение, найти  $c$  и  $e$ , а затем из (1.6) определить значение  $f$ .

## 2. Ускорение сходимости последовательностей

Построение процессов, ускоряющих сходимость последовательностей в рядах, было одной из любимых тем для многих исследователей в области численного анализа, среди которых можно упомянуть Ричардсона и Эйри, а также Эйлера и Чебышева. Мы рассмотрим сейчас  $\delta^2$ -процесс, который был введен в численный анализ Эйткенем<sup>1)</sup>; известен он был уже Куммеру.

Если

$$x_n \rightarrow x$$

и

$$x_n - x \approx A\lambda^n \quad (|\lambda| < 1)^2, \quad (2.1)$$

то

$$\frac{x_{n+2} - x}{x_{n+1} - x} \approx \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} \approx \lambda. \quad (2.2)$$

Из (2.2) мы находим:

$$x \approx x_{n+2} - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}.$$

Это внушает мысль о том, что последовательность  $\{\bar{x}_{n+2}\}$ , определенная соотношением

$$\bar{x}_{n+2} = x_{n+2} - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

сходится к  $x$  быстрее, чем первоначальная последовательность.

<sup>1)</sup> A. C. Aitken, Studies in practical mathematics 6. On the factorization of polynomials by iterative methods. Proc. Royal Soc. Edinburgh 63, Sect. A, 1951, стр. 174—191.

<sup>2)</sup>  $\approx$  — знак приближенного равенства, точный смысл которого выражается ниже соотношением (2.3). (Примечание редакции.)



Действительно это так; если

$$x_n - x = A\lambda^n + o(\lambda^n), \quad (|\lambda| < 1),$$

то отсюда следует, что

$$\bar{x}_n - x = o(\lambda^n).$$

Добавим к этому несколько замечаний. Во-первых, повторяя этот процесс, можно последовательно исключить из погрешности члены вида

$$A\lambda^n, B\mu^n, C\nu^n, \dots,$$

где  $1 > |\lambda| > |\mu| > |\nu| > \dots$ . Случаи, где встречаются равенства типа  $|\lambda| = |\mu|$ , могут быть также рассмотрены после внесения несложных изменений. Во-вторых, важно отметить, что этот процесс может ухудшить сходимость в том случае, если эта сходимость не связана с геометрической прогрессией так, как это требуется формулой (2.1).

Приведем для примера два известных итерационных процесса для определения числа, обратного заданному числу  $N$ . Рассмотрим последовательности

$$y_{n+1} = (1 - N)y_n + 1; \quad z_{n+1} = z_n(2 - Nz_n).$$

В случае, когда  $N = \frac{1}{2}$ ,  $y_0 = 1$ ,  $z_0 = 1$ , мы получим следующую таблицу:

$y_n$	$y_{n+1}$	$\frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$	$y_n$	$z_n$	$z_{n+1}$	$\frac{(z_{n+2} - z_{n+1})^2}{z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n}$	$z_n$
1	0,5		—	1	0,5		—
1,5	0,25	—0,25	—	1,5	0,375	—0,125	—
1,75	0,125	—0,125	2	1,875	0,1172	—0,2578	3,0000
1,875			2	1,9922			2,0455

Возникает впечатление, что последовательность  $\{\bar{y}_n\}$  сходится быстрее, чем  $\{y_n\}$ , тогда как последовательность  $\{\bar{z}_n\}$  сходится медленнее, чем  $\{z_n\}$ ; это легко можно доказать. Действительно, при  $0 < N < 1$  обе последовательности сходятся к  $N^{-1}$ , так как

$$y_n - N^{-1} = (1 - N)^n (y_0 - N^{-1})$$

и

$$z_n - N^{-1} = -N^{2n-1} (z_0 - N^{-1})^{2n}.$$

Таким образом,  $\{y_n\}$  удовлетворяет условию (2.1), а  $\{z_n\}$  не удовлетворяет ему, так как сходится слишком быстро. В первом случае мы имеем  $\bar{y}_n \equiv N^{-1}$  для всех значений  $n$ . С другой стороны, можно показать, что

$$\frac{\bar{z}_n - N^{-1}}{z_n - N^{-1}} \rightarrow -\infty.$$

Отметим, что для оправдания применения этого процесса достаточно установить выполнимость формулы (2.1) при  $|\lambda| < 1$ .

Широкое применение этого процесса имело место в экспериментах по конформным отображениям Бланша и Джексона, а также Тодда и Варшавского<sup>1)</sup>. Последние установили, что при отображении эллипса (с отношением осей 5:1) на круг для обеспечения верных девяти десятичных знаков у граничных значений требуется около 50 итераций, каждая из которых требует около 30 минут работы машины SEAC (National Bureau of Standards Eastern Automatic Computer).

Такую же точность оказалось возможным получить, применяя дважды процесс Эйткена к результатам первых 14 итераций, причем дополнительное время, необходимое для этого, пренебрежимо мало.

### 3. Видоизмененные разности

Мы покажем здесь, как использование квадратичной интерполяции дает возможность составителю таблицы сократить ее размер за счет некоторой работы того, кто будет ею пользоваться. Мы покажем далее, как может быть осуществлено дальнейшее уменьшение размера таблицы без добавочной затраты труда лицом, пользующимся таблицей (но при затрате труда составителем), с помощью видоизмененных разностей. Для простоты и определенности рассмотрим построение таблицы для  $\sin x$  с четырьмя десятичными знаками в пределах изменения  $x$  от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ .

#### а) Линейная интерполяция

Ошибка при линейной интерполяции, т. е. в предположении, что

$$f(a + ph) = f(a) + p \{ f(a + h) - f(a) \} \quad (0 \leq p \leq 1),$$

может быть оценена выражением

$$h^2 \left| \binom{p}{2} \right| \max |f''(x)|^2.$$

<sup>1)</sup> J. Todd, ed., Experiments in the computation of conformal maps, National Bureau of Standards, Applied Math. Series, № 42, U. S. Government Printing Office, 1954.

<sup>2)</sup> В иностранной литературе биномиальные коэффициенты  $C_m^n$  обычно записываются  $\binom{m}{n}$ . В данном случае  $\binom{p}{2}$  обозначает выражение  $\frac{p(p-1)}{2}$ , выпи-

Если ошибка должна быть меньше, чем  $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ , то удобным значением  $h$  является 0,02. При этом получается таблица, содержащая примерно 80 значений; часть такой таблицы показана ниже.

$x$	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	...
$\sin x$	0,0000	0,0200	0,0400	0,0600	0,0799	...

---

$x$	1,20	1,22	1,24	1,26	1,28	...
$\sin x$	0,9320	0,9391	0,9458	0,9521	0,9580	...

Интерполяция, например, для значения  $x=1,234$  в этой таблице должна выполняться следующим образом:

$$\sin 1,234 = 0,9391 + \frac{14}{20} (0,9458 - 0,9391) = 0,9438.$$

#### б) Квадратичная интерполяция

Рассмотрим теперь использование интерполяционной формулы Эверетта<sup>1)</sup>

$$f_p = qf_0 + pf_1 + E_0^2 \delta^2 f_0 + E_1^2 \delta^2 f_1 + E_0^4 \delta^4 f_0 + E_1^4 \delta^4 f_1 + \dots, \quad (3.1)$$

где

$$q = 1 - p, \quad E_0^2 = \frac{q(q^2 - 1)}{6}, \quad E_1^2 = \frac{p(p^2 - 1)}{6}, \quad \dots^2).$$

Если мы сохраним четыре первых члена, то возникающая при этом ошибка может быть оценена выражением

$$h^4 \left| \left( p + \frac{1}{4} \right) \right| \max |f^4(x)| \leq h^4 \cdot 0,024 \cdot 1.$$

Для того чтобы она не превосходила  $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ , удобно выбрать  $h=0,2$ .

Соответствующая *полная* таблица имеет следующий вид:

$x$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8
$\sin x$	0,0000	0,1987	0,3894	0,5646	0,7174
$\delta^2$	0	-80	-155	-224	-287

---

$x$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
$\sin x$	0,8415	0,9320	0,9854	0,9996	0,9738
$\delta^2$	-336	-371	-392	-400	-387

сное по тому же правилу, как биномиальный коэффициент  $C_p^2$ , но  $p$  — не целое число, а правильная дробь. Сходные обозначения используются и в дальнейшем. (Примечание редакции.)

<sup>1)</sup> Ср., например, H. Jeffreys and B. S. Jeffreys, *Methods of mathematical physics*, Cambridge, 1946, стр. 245 (книга переводится на русский язык). (Примечание редакции.)

<sup>2)</sup> Здесь  $f_p = f(a + ph)$ ,  $\delta^2 f_k = f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}$ ,  $\delta^4 f_k = f_{k-2} - 4f_{k-1} + 6f_k - 4f_{k+1} + f_{k+2}$ ,  $E_0^4 = \frac{q(q^2 - 1)(q^2 - 4)}{24}$ ,  $E_1^4 = \frac{p(p^2 - 1)(p^2 - 4)}{24}$ .

Для интерполяции мы должны вычислить каждый из коэффициентов Эверетта или получить их значения из таблицы. Для рассмотренного выше примера находим:

$$p=0,17, \quad E_0^2=-0,0430, \quad E_1^2=-0,0275.$$

Таким образом,

$$\sin 1,234=0,9320+\frac{34}{200}(0,9854-0,9320)+(0,0430)(0,0371)+ \\ + (0,0275)(0,0392)=0,9438.$$

### с) Метод видоизменения Комри

Метод, предложенный Комри<sup>1)</sup>, основан по существу на том факте, что отношение

$$k(p)=\frac{E_0^4}{E_0^2}=\frac{(p+1)(p-3)}{20}$$

приблизительно остается постоянным для значений  $0 \leq p \leq 1$  (примерно между  $-0,20$  и  $-0,15$ ). Обсуждались различные способы выбора среднего значения этого отношения<sup>2)</sup>. Наилучшим признано  $k=-0,18393$ . Занимем, используя это значение  $k$ , четыре первых члена формулы (3.1); тогда

$$f_p \approx qf_0 + pf_1 + \{E_0^2(\delta^2 f_0 + k\delta^4 f_0) + E_1^2(\delta^2 f_1 + k\delta^4 f_1)\}. \quad (3.2)$$

Поэтому, если мы положим

$$\delta_{\text{вид}}^2 f = \delta^2 f + k\delta^4 f$$

и используем эти видоизмененные вторые разности точно таким же способом, как использовали обычные вторые разности в предыдущем пункте, то мы сможем получить желаемую точность при интерполяции, имея еще больший шаг. В самом деле, ошибка в формуле (3.2) состоит из остаточного члена, не превосходящего

$$h^6 \left| \binom{p+3}{6} \right| \max |f^{(6)}(x)| \leq h^6 \cdot 0,0049,$$

а также из ошибки, произошедшей из-за усреднения  $k(p)$ . Можно показать, что эта последняя меньше половины единицы последнего десятичного знака в том случае, если четвертые разности меньше, чем 1000 единиц (а пятые меньше, чем 70 единиц того же разряда).

Формула (3.3) дает значение  $h \leq 0,46$ , что вызывает желание удовлетвориться выбором  $h=0,5$ . Для этого значения максимум четвертой разности определяется неравенством

$$(0,5)^4 |f^{(4)}(x)| \leq 0,0625,$$

<sup>1)</sup> L. J. Comrie, на стр. XIII—XIV таблиц «British Association Mathematical Tables», т. I, Cambridge, 1-е изд., 1931; 3-е изд., 1951.

<sup>2)</sup> M. Abramowitz, на стр. XXXIII—XXXVI таблиц National Bureau Standards, Tables of Bessel Functions of Fractional Order, т. I, Columbia Univ. Press, New York, 1947.

что является удовлетворительным, пятые же разности выходят за указанную выше границу. Несмотря на это, мы используем значение  $h=0,5$ , не выполняя более точных оценок.

Полная таблица имеет следующий вид:

$x$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0
$\sin x$	0,0000	0,4794	0,8415	0,9975	0,9093
$\delta_m^2$	0	-1225	-2154	-2552	-2326

Для интерполяции найдем сначала коэффициенты Эверетта

$$p=0,468, \quad E_0=-0,0636, \quad E_1=-0,0609;$$

тогда мы получим:

$$\begin{aligned} \sin 1,234 &= 0,8415 + \frac{234}{500}(0,9975 - 0,8415) + (0,0636 \cdot 0,2154) + \\ &+ (0,0609 \cdot 0,2552) = 0,9145 + 0,0137 + 0,0155 = 0,9437. \end{aligned}$$

Отличие от полученных выше результатов может быть объяснено как выбором чрезмерно большого значения  $h$ , так и ошибкой, возникающей при округлении.

Комри были рассмотрены и более сложные способы видоизменения разностей, например способ, загоняющий во вторые разности не только четвертые разности, но и шестые разности<sup>1)</sup>. Незначительные неудобства, связанные с видоизменением разностей, отмечены в работе, приведенной в первой сноске на предыдущей странице.

#### 4. Собственные значения матриц

Значительные усилия были затрачены для решения задач численного анализа, относящихся к матрицам. Две главные задачи этой области состоят в обращении матрицы и в определении ее собственных значений. Для решения обеих указанных задач существенно уметь оценивать границы, в которых лежат собственные значения. В этой связи обратим внимание на следующую лемму Гершгорина<sup>2)</sup>, используемую во многих приложениях.

Все собственные значения матрицы  $A=(a_{ij})$  лежат внутри круговых областей

$$|a_{ii} - z| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Это можно доказать, используя тот факт, что определитель с домини-

<sup>1)</sup> Interpolation and Allied Tables, напечатано в Nautical Almanac, H. M. Stationery Office, 1937, стр. 928—929.

<sup>2)</sup> С. Гершгорин, Об ограничении собственных значений матрицы. Известия АН СССР 7, 1931, стр. 749—754.

рующими диагональными элементами отличен от нуля. Этот результат был обобщен многими авторами<sup>1)</sup>.

Один из употребительных практических методов получения всех собственных значений симметричной матрицы связан с приведением матрицы к чисто диагональной форме при помощи произведения ортогональных преобразований, каждое из которых меняет только две координаты. Теоретически мы при этом получаем:

$$TAT' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix};$$

в таком случае  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  в точности равны собственным значениям. Практически же мы находим, что  $TAT' = (\epsilon_{ij})$ , где  $\epsilon_{ij}$  малы при  $i \neq j$ . Поставим теперь вопрос о том, насколько близки значения  $\epsilon_{ij}$  к значениям  $\lambda_i$ . Если мы пренебрежем тем обстоятельством, что преобразование не являлось в точности ортогональным и что вследствие этого характеристические корни матрицы  $(\epsilon_{ij})$  не равны тождественно корням матрицы  $(\lambda_{ij})$ , то ответ на наш вопрос вытекает сразу же с помощью леммы Гершгорина. Если  $\epsilon_{ij}$  при  $i \neq j$  достаточно малы, то

$$|\lambda_i - \epsilon_{ii}| \leq \sum_{i \neq j} |\epsilon_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Чтобы учесть ошибку округления в произведении  $TAT'$ , следует соответственно увеличить правую часть этого неравенства.

## 5. Квадратуры, интегральные уравнения, сходимость и устойчивость

### а) Квадратуры

Мы начнем с примера, показывающего, что и в этой области возникают широкие возможности применения новых идей к задачам классического численного анализа. Типичная формула численного интегрирования имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum p_i f(x_i),$$

а ошибка

$$E = \left| \int_a^b f(x) dx - \sum p_i f(x_i) \right|$$

может быть оценена как произведение  $n$ -й производной от  $f(x)$  в некоторой точке внутри отрезка  $[a, b]$  на соответствующий коэффициент.

<sup>1)</sup> Обзор ряда работ, посвященных этому вопросу (до 1947 г.), см. в работе Ольги Таусской: O. Taussky, A recurring theorem on determinants, Amer. Math. Monthly 56, 1949, стр. 672—676.

Во многих случаях оказывается весьма неудобным получать оценки для  $f^{(n)}(x)$  или определять их численно путем вычисления соответствующих разностей. Недавно Дэвис и Рабинович<sup>1)</sup> снова рассмотрели эту задачу в случае, когда  $f(x)$  является аналитической функцией в некоторой области, содержащей отрезок  $[a, b]$ . Случай, когда такой областью является эллипс  $\mathcal{E}$  с фокусами в конечных точках рассматриваемого отрезка (которые мы всегда можем считать находящимися в точках  $(1, 0)$ , и  $(-1, 0)$ ), особенно изящно рассматривается с помощью многочленов Чебышева

$$(1 - z^2)^{-1/2} \sin((n+1) \arccos z),$$

ортогональных на рассматриваемом эллипсе. Можно показать, что

$$|E| \leq \sigma_{\mathcal{E}} \|f\|,$$

где  $\sigma_{\mathcal{E}}$  — постоянная, зависящая только от эллипса  $\mathcal{E}$ , а

$$\|f\| = \int_{\mathcal{E}} |f(z)|^2 dx dy.$$

(Отметим, что  $\|f\|$  возрастает при увеличении  $\mathcal{E}$ ;  $\sigma_{\mathcal{E}}$  при этом, однако, уменьшается; поэтому здесь встает задача о наилучшем выборе  $\mathcal{E}$ . Значения  $\sigma_{\mathcal{E}}$  могут быть затабулированы раз и навсегда, а  $\|f\|$  может быть оценена, например, через  $\max |f|$ .)

В качестве примера рассмотрим вычисление  $\int_3^4 \Upsilon(x) dx$  по формуле Гаусса с семью точками. Представляется совершенно устрашающим вычислить и оценить четырнадцатые производные от  $\Upsilon(z)$ . Производя простые оценки по только что описанному методу, мы найдем:

$$|E| \leq 2,04 \cdot 10^{-12}.$$

Сравнение этой оценки с той, которая дается обычно<sup>2)</sup>,

$$\frac{f^{(2n)}(\xi)(n!)^4}{(2n!)^2(2n+1)} \quad (3 \leq \xi \leq 4),$$

где производные оцениваются при помощи формулы Коши, показывает, что новый способ несколько лучше.

(Окончание в следующем выпуске)

(Перевод с английского Г. А. Шестопал  
под ред. К. А. Семендяева)

<sup>1)</sup> P. Davis and P. Rabinowitz, On the estimation of quadrature errors for analytic functions, Math. Tables and Other Aids to Computation, т. 8, 1954, стр. 193—203; P. Davis, Errors of numerical approximation for analytic functions, J. Rational Mech. Analysis 2, 1953, стр. 303—313.

<sup>2)</sup> G. Szegő, Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Colloquium Publication, № 23, 1939.

## ИЗ ПРОШЛОГО И НАСТОЯЩЕГО АНГЛИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ АССОЦИАЦИИ И «МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГАЗЕТЫ»

*Ю. М. Гайдук*  
(Харьков)

Английская Математическая ассоциация (The Mathematical Association) является одним из старейших и вместе с тем крупнейших национальных объединений математиков-педагогов. В настоящей статье дается краткий очерк истории этой ассоциации и рассказывается о содержании и формах ее деятельности в наши дни. Мы особо остановимся при этом на важной роли, которую играет в жизни этой ассоциации ее печатный орган — «Математическая газета» (The Mathematical Gazette).

Исторически сложилось, что в английской школе необыкновенно долго — значительно дольше, чем в школах других стран, — сохранялась верность восходящей в глубь веков традиции употребления «Начал» Евклида в качестве основного учебного руководства по геометрии<sup>1</sup>). Этот консерватизм, характерный для Англии вообще, находился в данном случае в прямой связи с тем культом Евклида, который издавна господствовал в английских университетах, долго остававшихся глухими к педагогической и научной критике «Начал»; преподавание в английской средней школе и в наши дни фактически в сильной степени контролируется университетами, так как специальные университетские органы руководят приемом экзаменов на аттестат зрелости.

К середине XIX в. в результате количественного роста средней школы и повысившихся требований к математической подготовке ее выпускников ярко выявилось, что обучение геометрии по Евклиду не соответствует психологически-возрастным особенностям восприятия учащихся и социальным задачам школы. Более чуткие к запросам времени педагоги-математики (тогда еще немногочисленные в Англии) начали

<sup>1</sup>) См. об этом в обстоятельной статье В. Ф. Кагана «Учебная литература по элементарной геометрии во второй половине XVIII и начале XIX вв.» во II томе Полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского, М., 1949, стр. 9—29. О более ранней истории «Начал» в Англии см. некоторые сведения в книге В. Ф. Кагана «Основания геометрии», М.—Л., 1949, ч. I, гл. I, § 1.



сознавать необходимость разрыва с евклидовской традицией в элементарном преподавании геометрии. Страстным глашатаем новых тенденций в этом преподавании выступил один из крупнейших английских математиков того времени Дж. Сильвестр (1814—1897). В своем президентском адресе на съезде Британской ассоциации содействия развитию наук (1869) он обратился с призывом совершенно отказаться от «Начал» Евклида в средней школе и основать преподавание геометрии на принципах, раскрывающих учащимся опытный характер происхождения наших геометрических знаний. Придала смелости «геометрическим еретикам» и острая критика логических промахов в «Началах», прозвучавшая из уст другого видного английского ученого этой эпохи А. де Моргана (1806—1871).

В 1870 г. началось организационное оформление движения за реформу преподавания геометрии в английской школе: по инициативе педагогов-математиков Р. Леветта, Р. Теккера, Дж. Вильсона, Э. Маккарти и других искатели новых путей в методике геометрии объединились в «Ассоциацию для реформы геометрического преподавания» (Association for Reform of Geometrical Teaching). Первоначально ассоциация насчитывала всего несколько десятков членов — преподавателей средней и высшей школы из разных частей страны. На состоявшейся в 1871 г. конференции ассоциация решила заменить в своем наименовании слово «реформа» словом «улучшение».

Большую поддержку зародившейся организации оказали члены Королевского общества<sup>1)</sup>: президент Лондонского математического общества В. Споттисвуд, директор Королевской школы судостроения Ч. Меррифильд и профессор Лондонского университета Т. Херст. Последний был избран первым президентом ассоциации и оставался на этом посту 7 лет<sup>2)</sup>.

Ассоциации с самого начала своего существования пришлось испытать сильное противодействие как со стороны многочисленных представителей реакционной педагогики — хранителей схоластических традиций «классической» средней школы, так и со стороны ученых, воспитанных на пиетете к евклидовым «Началам» и недоверчиво настроенных к педагогическим новшествам<sup>3)</sup>. Неблагоприятным для ассоциации было начавшееся в Италии и некоторых других странах «возвращение к Евклиду», к тому же слишком буквально понятое английскими педагогами. Немало повредили в свое время репутации ассоциации и некоторые ее члены, предлагавшие взамен «Начал» составленные ими на скорую руку учебники низкого научного и методического достоинства. Тяжелой потерей

<sup>1)</sup> The Royal Society (объединение, являющееся по существу английской академией наук).

<sup>2)</sup> Затем президентами «Ассоциации для улучшения геометрического преподавания» (до ее преобразования в 1897 г.) были: Р. Хэйуорд (1878), проф. Г. Минчин (1889), проф. Дж. Сильвестр (1891), Ч. Тейлор (1892), Р. Уормель (1893), Дж. Лармор (1895).

<sup>3)</sup> В числе таких математиков был и Артур Кэли — «Дарвин английской математической науки», как назвал его Сильвестр.

для ассоциации было отсутствие в 1876—1883 гг. Сильвестра, который уехал в Америку в результате несправедливого отношения английского правительства к заслуженному ученому<sup>1)</sup>.

Не пытаясь ставить перед собой на первых порах более радикальные цели, ассоциация решила прежде всего добиваться предоставления преподавателям геометрии в средней школе права отклоняться от евклидова изложения в определенных, точно оговоренных моментах, именно тех, где изложение у Евклида уже было скомпрометировано педагогической или научной критикой. Конкретные требования ассоциации в ее начальный период сводились к следующему:

1) Свободно применять в школьном курсе гипотетические построения, арифметическое определение пропорций, понятия движущейся точки и вращающейся линии, углы  $\geq 2d$ , способы наложения (всего этого Евклид или вовсе не допускал, или допускал лишь очень ограниченно).

2) Устранить принцип ограничения числа аксиом только теми, которые не допускают вывода из уже принятых аксиом.

3) Обновить геометрическую терминологию (в частности, ввести такие термины, как геометрическое место, проекция и др.).

В духе этих требований ассоциация разработала в 1875 г. программу—конспект [«силлабус»<sup>2)</sup>], курса планиметрии. Силлабус должен был служить методическим пособием для учителей-новаторов и авторов учебников геометрии, стремившихся отойти от евклидовых канонов. На основе этого силлабуса ассоциация в 1883—1886 гг. выпустила собственный учебник планиметрии.

Силлабусу и учебнику ассоциации не удалось вытеснить излюбленных английской школой «переложений» сочинения Евклида; но новые издания этого рода<sup>3)</sup> испытали на себе влияние идей, защищавшихся ассоциацией: если не в самом тексте «Начал», то в присоединяемых к ним дополнениях они отразили на себе новые веяния.

В 1887—1888 гг. Оксфордский и Кэмбриджский университеты, частично уступая одному из требований ассоциации, разрешили своим экзаменационным органам принимать от экзаменующихся абитуриентов средней школы доказательства, отличные от доказательств Евклида, если при этом не нарушается евклидов порядок предложений. Это решение знаменовало собой начало — тогда еще очень скромное — официального признания в Англии модернистских стремлений в области преподавания геометрии.

<sup>1)</sup> Такое отношение английского правительства к Сильвестру выразилось, в частности, в отказе ему в таком же вознаграждении, какое полагалось «коронным» английским профессорам. По-видимому, здесь сыграл свою роль национальный момент. (Об этом инциденте с сожалением писали современные английские журналы.)

<sup>2)</sup> В учебной английской терминологии под силлабусом понимается учебная программа какой-нибудь дисциплины, обычно — комментированная.

<sup>3)</sup> В частности, «Первые шесть книг „Начал“ Евклида с подробными разъяснениями и многочисленными упражнениями», написанные членом ассоциации Джоном Кэзи (1882).

В конце 70-х и в течение 80-х годов прошлого столетия ассоциация расширила круг своих занятий: кроме вопросов преподавания элементарной геометрии, она изучала постановку курсов высшей геометрии и геометрической теории конических сечений (эти курсы входили в программы старших классов некоторых типов средней школы), а также курсов арифметики и механики. Результаты этой работы выразились в издании рекомендательных силлабусов по высшей геометрии, теории конических сечений и элементарной динамике.

Важным событием в жизни ассоциации явилось принятое накануне ее двадцатипятилетнего юбилея решение об издании собственного печатного органа — «Математической газеты»<sup>1)</sup>. Первый номер этого журнала вышел в апреле 1894 г. под редакцией одного из членов совета ассоциации — Э. М. Лэнгли.

Остановимся на содержании этого номера. Он открывался передовой статьей, где сообщались краткие сведения об истории ассоциации и о ее современных задачах, подчеркивалось значение журнала как проводника идей ассоциации и трибуны широкого обмена методическим опытом, накопленным английскими преподавателями математики, намечалась программа издания. Программа эта ограничивалась преимущественно областью элементарной математики<sup>2)</sup> (взятой как в ее педагогическом, так и в научном аспекте), но не исключала также элементов дифференциального и интегрального исчисления. Основное содержание первого номера составили три статьи: статья Э. М. Лэнгли, знакомившая с методом эксцентрической окружности Бошковица в элементарной теории конических сечений<sup>3)</sup>, исторический очерк Дж. Маккея о греческих геометрах до Евклида и статья профессора А. Лоджа по арифметике приближенных вычислений. Затем следовали отдел решений экзаменационных задач и отдел задач для читателей<sup>4)</sup>.

В связи с расширением своих интересов на всю сферу преподавания чистой и прикладной математики в английской средней и частично высшей школе «Ассоциация для улучшения геометрического преподавания» реорганизовалась в 1897 г. в «Математическую ассоциацию». Было принято решение о регулярном — ежегодном — созыве съездов ассоци-

---

<sup>1)</sup> Первые годы «Математическая газета» выходила каждые четыре месяца и представляла собой издание формата небольшой газеты.

<sup>2)</sup> К элементарной математике в Англии относятся также и начала механики.

<sup>3)</sup> Отметим, впрочем, что Лэнгли был не первым в Англии пропагандистом метода Бошковица: в выпущенной Ч. Тейлором в 1881 г. (Кэмбридж) книге «Введение в старую и новую геометрию конических сечений» метод, развитый югославским математиком XVIII века, получил широкое использование. В методе Бошковица свойства конических сечений (определяемых заданием фокуса, директрисы и эксцентриситета) выводятся из свойств окружности.

<sup>4)</sup> Вскоре в журнале появились и статьи с более четко выраженным педагогическим содержанием. Типичной в этом отношении является статья В. Дж. Гринстрита «О взглядах Гербарта на место математики в школьном обучении», № 5—6, 1895.

ции, о порядке выборов президента и совета ассоциации, о правах и обязанностях ее членов.

С этого времени начинается быстрый количественный рост ассоциации: за период 1898—1913 гг. число ее членов увеличилось с 230 до 700. К 1940 г. это число достигло уже 1800. Нынешняя численность ассоциации превосходит 2500 человек.

Но для правильной оценки количественного охвата ассоциацией массы британских преподавателей математики приведенных цифр недостаточно: за последнее пятидесятилетие Математическая ассоциация обросла десятками местных отделений во многих графствах Великобритании и в разных частях Британской империи<sup>1)</sup>; лишь немногие члены этих местных организаций состоят вместе с тем индивидуальными членами «материнской» ассоциации, так как это членство сопряжено с уплатой довольно значительного ежегодного взноса<sup>2)</sup>. Таким образом, фактический состав Математической ассоциации и ее отделений значительно превышает указанную цифру в 2500 человек. При всем том ассоциация вместе с ее филиалами еще далека от охвата всей массы рядовых преподавателей математики в Англии.

Первым президентом реорганизованной ассоциации был избран профессор А. Лодж. По установленному первоначально регламенту президенты ассоциации переизбирались каждые два года; с 1934 г. они стали избираться ежегодно; по истечении срока своих полномочий президент становится одним из вице-президентов ассоциации, это способствует укреплению преемственности в работе организации.

В списке президентов Математической ассоциации мы находим многих выдающихся английских математиков: А. Р. Форсайт, Э. В. Хобсон, А. Н. Уайтхэд, Э. Т. Уиттекер, Дж. Х. Харди, А. С. Эддингтон, Дж. Н. Ватсон, С. Чепмен, М. Л. Картрайт, В. В. Ходж и др. Как правило, эти имена чередуются с именами известных английских деятелей на поприще педагогики математики: Т. П. Нэнн, Э. К. Невиль, А. В. Сиддонс, К. О. Тэккей, В. Ф. Бушелл, К. С. Снелл, Т. А. Бродбент и др.

Одну из освященных традицией обязанностей президента ассоциации составляет чтение «адреса» при открытии очередного съезда. Адрес посвящается, как правило, какой-нибудь достаточно широкой и актуальной теме научного или педагогического содержания, близкой к личным специальным интересам оратора. Приведем темы адресов за последние несколько лет: «Пятьдесят лет моей математической деятельности»

<sup>1)</sup> В настоящее время имеется около 20 отделений ассоциации в различных городах и местностях Великобритании. Кроме того, существуют отделения ассоциации в Австралии (Новый Южный Уэльс, Квинслэнд, Виктория), Новой Зеландии (Окленд), Южной Африке и некоторых других частях Британской империи. Наиболее крупные отделения ассоциации — в Лондоне (500 членов) и Новом Южном Уэльсе. Последнее отделение издает журнал «Австралийский учитель математики». В ассоциацию входит также ряд местных студенческих и ученических математических обществ.

<sup>2)</sup> Составляющего в последние годы 21 шиллинг.

(Х. Хассе, 1951), «Нелинейные колебания — новая глава в истории математики» (М. Картрайт, 1952), «Школьная математика сегодня и завтра» (К. Снелл, 1953), «Типографская краска и учитель» (Т. Бродбент, 1954), «Старый и новый взгляд на геометрию» (В. Ходж, 1955) <sup>1)</sup>.

Программа каждого съезда ассоциации, кроме президентского адреса, отчета совета ассоциации и организационных вопросов, включает обычно две-три дискуссии по злободневным педагогическим вопросам и один или два обзорных доклада на научную или педагогическую тему. В качестве конкретной иллюстрации мы рассмотрим в общих чертах содержание работы съезда, проходившего 3 и 4 января 1952 г. в Лондоне.

Президентский адрес д-ра Мэри Л. Картрайт был посвящен одной из актуальных проблем математических исследований — нелинейным колебаниям; изучение этих колебаний представляет большую важность для современной физики и техники. Первая дискуссия была проведена в связи с пятидесятилетием существования Учебного комитета ассоциации <sup>2)</sup> по «отчетам» комитета, играющим роль методических директив. Вторая дискуссия касалась употребления в преподавании векторных методов. Наконец, третья дискуссия была посвящена методике преподавания в средней школе дифференциального и интегрального исчисления. Заключительным пунктом программы съезда явился обзорный доклад А. В. Фуллера, посвященный некоторым счетным и измерительным приборам, которые могут найти применение в школьной практике, особенно ввиду тенденций к введению в программу школы элементов статистики.

Съезды ассоциации, очень небольшие по числу участников в начале столетия, ныне собирают аудиторию в несколько сот человек. Материалы съездов публикуются в «Математической газете» и таким образом становятся достоянием всех членов ассоциации <sup>3)</sup>.

Большую массовую работу со своими членами ведут местные отделения ассоциации, созывающие свои собрания несколько раз в год. Краткие отчеты о работе отделений также время от времени появляются в «Математической газете».

Административным органом ассоциации является совет, состоящий из президента, нескольких вице-президентов, значительного числа членов (каждое крупное отделение ассоциации представлено в совете), двух или трех секретарей, почетного библиотекаря, почетного казначея и редактора «Математической газеты».

В 1902 г. при совете ассоциации образовался существующий и поныне «Учебный комитет». Он приобрел значение органа, руководящего всей педагогической «политикой» ассоциации. В настоящее время

<sup>1)</sup> Основное содержание адреса Снелла будет изложено ниже; полный перевод адреса Ходжа будет напечатан в одном из следующих выпусков «Математического просвещения». (Примечание редакции.)

<sup>2)</sup> Подробнее об этом комитете будет сказано ниже.

<sup>3)</sup> Каждый член ассоциации по регламенту получает «Математическую газету».

выборы этого комитета происходят каждые четыре года, причем не менее одной трети его состава каждый раз обновляется в обязательном порядке — мера, принятая для расширения круга активных участников методической деятельности ассоциации. В Учебный комитет<sup>1)</sup> входит 47 членов: президент, казначей, секретари и редактор ассоциации; восемь представителей от университетов, пять — от учительских колледжей и педагогических факультетов университетов, четыре — от школ технического образования, 16 преподавателей средней школы и девять учителей начальной школы и лиц со специальными интересами.

В составе Учебного комитета действует несколько подкомитетов: по «новым средним школам», по начальным школам, по техническим колледжам, по методике высшей математики в средней школе, по профессиональному образованию, по алгебре в старших классах средней школы, по подготовительной школе, по истории математики в школьном преподавании. Ранее существовавший подкомитет по наглядным пособиям в настоящее время выделился в отдельную организацию<sup>2)</sup>.

Остановимся на обстоятельствах возникновения и основных моментах последующей деятельности Учебного комитета. В связи с этим дадим краткую справку о современной структуре английской средней школы<sup>3)</sup>.

В Англии существуют три основных типа общеобразовательной средней школы: «публичная» школа, «грамматическая» и «новая средняя».

Публичная школа представлена немногочисленными частными учебными заведениями привилегированного характера и рассчитана на учащихся — детей «аристократии» в возрасте 13—18 лет; воспитанники этой школы пользуются преимуществом при зачислении в университеты.

Грамматическая школа соответствует в основном нашим прежним гимназиям; возраст учащихся — от 11 до 16 или от 11 до 18 лет в зависимости от срока обучения в старших шестых классах, который в разных школах может быть разным — от 1 до 3 лет. В старших (пятых-шестых) классах допускается специализация учащихся, в том числе и по математике. В грамматическую школу принимается около 20 процентов окончивших начальную школу, причем отбор производится посредством экзаменов и специальных тестов «для определения умственной одаренности». Для получения права на поступление в высшие школы и других преимуществ абитуриенты грамматических и публичных школ держат экзамены на аттестаты зрелости.

Новая средняя школа является наиболее массовым типом средней школы — в ней обучается до 75% всей молодежи в возрасте 11—15 лет, — но фактически представляет собой род высшего начального уч-

<sup>1)</sup> По данным на 1954 г.

<sup>2)</sup> «Ассоциация для учебных пособий по математике». Президентом ее состоит в настоящее время известный английский педагог Гаттеню.

<sup>3)</sup> За более полными сведениями отошлем к статье В. П. Лапчинской и К. И. Салимовой «Борьба за реорганизацию системы школьного образования в Англии», журнал «Советская педагогика», № 4, 1955.

лица; содержание обучения в ней носит подчеркнуто практический, утилитарный характер<sup>1</sup>).

Демократическая общественность Англии ведет в настоящее время борьбу за повышение качества обучения в новых средних школах, увеличение срока обучения в них и расширение программ с целью последующего уравнения их в правах с традиционными типами средней школы. Повышенное внимание к проблемам новой средней школы находится в связи с осуществлением закона 1944 г. о всеобщем обязательном обучении молодежи в возрасте 11—15 лет.

В 90-х годах XIX в. и в начале XX в. представители английских инженерных кругов (О. Хевисайд и особенно Дж. Перри) подняли кампанию против схоластического характера преподавания математики в английских средних школах. Так возникло получившее широкий резонанс и за пределами Англии «движение Перри», стремившееся положить в основу школьного преподавания математики принципы наглядности, активности учащихся, утилитарности учебного материала, ставя на второй план и даже жертвуя для этой цели систематичностью, логикой и строгостью в школьной математике. Новое движение громко заявило о себе на съезде Британской ассоциации содействия развитию наук в 1901 г. Съезд выделил комиссию (с председателем А. Р. Форсайтом и секретарем Дж. Перри) для изучения состояния преподавания математики в стране и для выработки программы желательных изменений.

На съезде Математической ассоциации в 1902 г. один из членов этой комиссии (проф. А. Лодж) сделал сообщение об этой инициативе Британской ассоциации. Чтобы усилить роль Математической ассоциации в расширившемся движении за реформу преподавания математики, съезд вынес решение об образовании в составе ассоциации Учебного комитета. Наиболее активными членами комитета в начале его деятельности были Годфрей, Холмс, Лэнгли, Тэккей, Сиддонс<sup>2</sup>).

Комитет поставил перед собой две цели: разработать программу необходимых реформ в преподавании математики и добиться таких изменений в экзаменационных требованиях, при которых возможно было

<sup>1</sup> Резкое различие между новой и грамматической школами может быть проиллюстрировано нижеследующей таблицей, указывающей, какое место в учебном плане школы занимают различные циклы дисциплин:

Название цикла	Грамматическая школа	Новая школа
Гуманитарные предметы . . . . .	50—48%	25%
Естественно-математические . . . . .	26—28%	18%
Практический цикл . . . . .	4%	27%
Художественный цикл и физическое воспитание . . . . .	16%	24%
Религия . . . . .	4%	6%

<sup>2</sup> С конца 1900-х годов большое влияние на деятельность Учебного комитета оказывал видный английский методист Перси Нэнн.

бы осуществить эту программу на практике. Комитет занял значительно менее радикальную позицию, чем «движение Перри», и с целью получения поддержки со стороны большинства английских учителей математики взял курс на постепенность в проведении в жизнь реформ. Своей ближайшей задачей комитет поставил — добиться отказа университетских властей от принципа обязательности евклидова порядка предложений в курсе геометрии. Эта цель была достигнута: уже в 1903 г. Оксфордский и Кембриджский университеты разрешили «принимать от экзаменуемых любые доказательства, составляющие часть какого-либо систематического изложения геометрии». В том же смысле университеты признали «приемлемость» геометрических доказательств, применимых лишь к сопмеримым величинам, и доказательств, использующих гипотетические построения. Ассоциации удалось добиться также принятия большей части своих рекомендаций в области преподавания арифметики и алгебры<sup>1)</sup>. Эта перемена в отношении к «Началам» Евклида со стороны университетов устранила одно из главных препятствий на пути к обновлению преподавания математики в английской средней школе.

Тем не менее дух Евклида и после этого еще ряд лет продолжал витать над английской школой, где главное внимание при преподавании геометрии по-прежнему уделялось изучению большого числа теорем и поддерживалась тщательная изоляция курса геометрии от других математических предметов, — новые же веяния сводились в первые годы лишь к усиленным упражнениям учащихся в черчении.

Фактический перелом в деле преподавания геометрии начался в Англии в 1909 г.<sup>2)</sup>, когда цели реформаторов школьной геометрии были приведены в систему специальным циркуляром Министерства просвещения. По этому документу преподавание геометрии в школе делилось на три последовательные стадии, отличающиеся между собой не только проходимым материалом, но и самими методами его изучения: 1) практическое ознакомление учащихся с основными геометрическими понятиями и усвоение ими элементов геометрической терминологии (без формальных определений); 2) экспериментальное и интуитивное нахождение учащимися геометрических фактов, относящихся к углам, параллельным линиям и признакам равенства треугольников (без попыток обучения логическим доказательствам этих фактов); 3) дедуктивное построение систематического курса геометрии<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Нужно заметить, что содержание рекомендаций 1903 г. не выходило, в сущности, за рамки требований, выставленных еще в 1870-х годах Ассоциацией для улучшения геометрического преподавания.

<sup>2)</sup> Последовавшая вскоре первая мировая война задержала развитие этого процесса, вошедшего в полную силу уже в середине 20-х годов.

<sup>3)</sup> Оговоримся, однако, что в современных условиях английской школы лишь немногие учащиеся (специализирующиеся по математике в грамматических школах и выделенные в группы «одаренных» в новых школах) действительно достаточно основательно знакомятся с геометрией в третьей стадии — все же остальные останавливаются на второй стадии. Об этом говорится в статье К. О. Тэккея «Геометрические отчеты» («Математическая газета», № 314, 1951).



Указанное разделение курса геометрии послужило основой для работы Учебного комитета над методическими проблемами геометрии на следующие два-три десятилетия. Результаты этой работы получили отражение в двух обширных «Геометрических отчетах» комитета (в 1923 и 1938 гг.), а также в «Тригонометрическом отчете» (в 1950 г.)<sup>1)</sup>.

Охарактеризуем кратко направление деятельности Учебного комитета в двух других областях школьной математики. По линии арифметики усилия комитета были направлены к устранению громоздких вычислений и уменьшению механически применяемых правил решения задач. По линии алгебры преодолевалась традиция формального изложения с упором на тождественные преобразования и внедрялись идеи функциональной зависимости; были сделаны рекомендации, направленные к «скорее психологической, чем логической» трактовке предмета.

Из остальных учреждений ассоциации следует указать на «Бюро по решению задач» — задач, которые интересуют, но затрудняют отдельных членов ассоциации (обычно это — задачи из области анализа или механики). Услугами бюро пользуется значительное число членов ассоциации, главным образом — из тех, которые готовятся к сдаче экзаменов на получение университетских стипендий или преподавательских прав<sup>2)</sup>. Сношения бюро с его «клиентами» ведутся в форме индивидуальной переписки. Деятельность бюро отчасти заменяет отсутствующий в «Математической газете» отдел задач.

Ассоциация располагает своей библиотекой, комплектуемой научной и педагогической литературой по математике и смежным наукам. Библиотека составилась из книг и журналов, пожертвованных членами ассоциации или полученных от иностранных обществ в обмен на издания ассоциации. В дни съездов ассоциации библиотека организует выставки литературы. Иногородних членов ассоциации библиотека обслуживает по почте. В течение многих лет почетным библиотекарем ассоциации состоял проф. Э. Х. Невилль — большой эрудит и библиофил.

Первостепенную роль в жизни ассоциации издавна играет ее печатный орган — «Математическая газета». Выше мы говорили о возникновении этого журнала в качестве органа «Ассоциации для улучшения геометрического преподавания».

Первый редактор журнала Э. М. Лэнгли исполнял эти функции недолго: его именем подписаны только первые шесть номеров. Ближайшие преемники Лэнгли — Ф. С. Маколей, а затем Ф. В. Хилл — также редактировали «Математическую газету» лишь очень короткое время (№ 7—15).

<sup>1)</sup> Упомянем, кстати, что сейчас в Англии господствует тенденция к возможно более полному слиянию геометрии и тригонометрии в один учебный предмет.

<sup>2)</sup> В Англии большой недостаток в квалифицированных кадрах преподавателей математики для средней школы. Так, в 1954 г. в северо-западных графствах Англии 28% преподавателей математики в грамматических школах не имели необходимой квалификации.

В 1899 г. редакция перешла в руки В. Дж. Гринстрита, оставшегося в этой должности до конца своей жизни (июль 1930 г.). Гринстрит обладал энциклопедическими знаниями в области элементарной математики и огромной работоспособностью; он добился того, что «Математическая газета» стала одним из самых авторитетных в мире органов математического просвещения. Научную помощь в редакционной работе Гринстрит получал от Ф. С. Маколея, Х. В. Ллойд-Таннера, Э. Т. Уиттекера и в особенности от постоянного сотрудника журнала в 1900—1914 гг., будущего «лидера» английских математиков первой половины XX в., тогда еще молодого кэмбриджского «дона» (члена университетской коллегии) Дж. Х. Харди. Его статьи, заметки и, отнюдь не в последнюю очередь, содержательные и меткие рецензии высоко ценились читателями журнала. Выступления Харди в «Математической газете» по вопросам изложения математического анализа существенно способствовали модернизации преподавания этой дисциплины в учебных заведениях Англии.

1915—1930 гг. были для журнала временем упадка — сказались первая мировая война, болезнь Гринстрита и другие причины. После смерти Гринстрита в течение 25 лет «Математическую газету» возглавлял энергичный и компетентный редактор Т. А. Бродбент. За этот период годовой объем издания значительно увеличился (с 320 страниц в 1932 г. до 528 страниц в 1938 г.), расширился круг авторов, было привлечено к участию в журнале много видных английских и иностранных специалистов.

Чтобы получить отчетливое представление о «Математической газете» этого времени, рассмотрим подробнее один из ее номеров перед второй мировой войной — № 249 за 1938 г.

Это — томик в 120 страниц (в восьмую долю листа); он содержит: четыре статьи, подробные материалы двух методических дискуссий на съезде ассоциации, информацию о текущей работе Учебного комитета, отдел математических заметок (их в этом номере 10), письмо читателя из Австралии, обширный библиографический отдел (рецензии или аннотации 24 кнпг) и, наконец, весьма своеобразную рубрику: чем-либо замечательные (чаще — в ироническом смысле) цитаты из литературы, так или иначе касающиеся математики.

В первой из статей (Н. М. Гиббинса) дан аналитико-геометрический вывод свойств четырехугольника Фейербаха<sup>1)</sup>. Вторая статья — это президентский адрес съезду лондонского отделения ассоциации, прочитанный Л. Хогбенем: «Нужды и трудности среднего учащегося». Основное положение докладчика: для успешного усвоения учащимися математики (и любого другого предмета) недостаточно одного лишь ясного изложения учителем материала — необходимо, чтобы это изложение

<sup>1)</sup> Конфигурация, находящаяся в тесной связи с «кругом девяти точек». Тему этой статьи английский автор использовал в учебных занятиях с учащимися VI классов (специализирующимися по математике).

оказалось интересным для учащихся. Для этого Хогбен предлагает начинать значительно раньше знакомить учащихся с тригонометрией, аналитической геометрией, анализом и трехмерными телами и резко сократить «не интересный для учащихся» курс формальной (дедуктивной) планиметрии. Далее, в адресе резко критикуется английская система мер и весов, представляющая большие трудности в преподавании. Хогбен замечает, что эта система «причиняет огромный вред в деле образования». Заставляя ребенка совершать утомительные арифметические подвиги в возрасте, когда у него нет интереса к выкладкам с большими числами, она зарождает в нем враждебное чувство к науке о числе задолго до начала систематического изучения им математики. С другой стороны, расхождение между метрической системой мер — «ходячей монетой» в физике — и единицами, которыми пользуется инженер-практик, ставит точные науки в положение культа, роль которого в повседневной британской жизни остается замаскированной. Хогбен предлагает английской математической общественности усилить давление на парламент и побудить его перейти в стране к метрической системе мер.

Следующая статья, как и первая, принадлежит Н. М. Гиббису и посвящена исследованию (при помощи комбинации элементарных и аналитико-геометрических приемов) треугольника, стороны которого заданы в прямоугольной системе координат уравнениями:  $S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  и  $L \equiv lx + my + n = 0$ , причем «правилом игры» ставится условие не применять разложения на множители.

Наконец, четвертая статья «Отношение математической философии к преподаванию математики» составляет содержание реферата, прочитанного на съезде ассоциации М. Блэком. В небольшом очерке обрисованы основные моменты развития математической логики, логистской и формалистической школ в философии математики. Одним из итогов этого развития, указывает автор, является укрепившееся сознание того, что дедуктивный идеал в математике подчинен закону изменения и эволюции; осмысливая диалектический характер идеала дедуктивной системы, мы освобождаемся от взглядов на представления современной математики как на абсолютную окончательную истину, открытую нам «то ли Евклидом, то ли Гильбертом, то ли богом», и приходим к надлежащему пониманию значения «неформальных, но не менее важных аспектов математического мышления». В процессе обучения, заключает отсюда Блэк, нужно делать упор не на самом недостижимом идеале полноты дедукции, а на путях приближения к этому идеалу, не на конечном итоге бесконечного ряда, данного развитием математики, а на законе образования этого ряда — на математическом методе.

Знаменательно расхождение правильных высказываний цитируемого английского автора с тенденциями так называемой «английской школы философии математики» (логицизм Б. Расселя — А. Уайтхеда) — этой опоры формалистских течений в английской методике математики!

Представляют значительный интерес напечатанные в номере подробные материалы двух методических дискуссий. Первая из них посвящена вопросу о сравнительном значении чистой и прикладной математики в школьном курсе. Основной докладчик д-р В. Дж. Бикли (Имперский колледж) подчеркнул опасное для интересов страны отставание современной Англии в области прикладной математики и критиковал постановку школьного преподавания математики в английской средней школе, в котором ученики недостаточно знакомятся с прикладной математикой. Вместе с тем докладчик проанализировал разнообразные трудности, стоящие на пути более широкого внедрения прикладных мотивов в школьный курс математики: узость реального опыта школьника, психологические особенности мышления самого учителя (как правило, «чистого» математика), недостатки университетской подготовки будущих преподавателей и т. п. Большинство выступивших в прениях по докладу Бикли останавливалось на постановке преподавания механики в английской школе, причем высказывалось пожелание раньше начинать изучение механики в школе и более сблизить этот предмет с курсом физики. В дискуссии выявилось также стремление расширить преподавание прикладной математики в школе, не ограничиваясь одной механикой, причем преимущественно назывались статистика с началами теории вероятностей и биоматематика<sup>1)</sup>.

Темой второй дискуссии явился вопрос об учащихся, «абсолютно неспособных» к математике. Основываясь на личных наблюдениях, многие участники дискуссии утверждали, что такого рода учащихся в действительности не существует — хотя и имеются такие, которые производят на первый взгляд впечатление «сильных кандидатов на это звание». В английских школах слабо успевающие учащиеся объединяются, как правило, в особые классы — «С-классы», занимающиеся по сокращенным программам. Некоторые из выступавших на дискуссии, хотя и не смело, возбуждали вопрос о нецелесообразности этой системы, заранее ограничивающей математическое развитие отстающих учащихся.

«Математические заметки» в номере весьма разнообразны по своим темам: решение одной топологической головоломки, вопрос об удобном обозначении относительной скорости, связь теорем Ньюмена (в теории матриц) с одной из алгебраических теорем Гурвица, ряд «новых свойств»

---

<sup>1)</sup> Заметим, что поворот в сторону более широкого отражения в школьном преподавании математики ее практического значения особенно усилился в Англии в годы второй мировой войны и затем сохранился в последующий период. В тематике прикладных вопросов, проникших в эти годы в школьный курс, видное место заняли, в частности, вопросы «оборонной математики», а также современной вычислительной техники. О серьезном внимании, с которым отнеслись к новым тенденциям английские преподаватели математики, свидетельствует отчасти и тот факт, что в программах съездов Математической ассоциации и ее отделений можно часто встретить рефераты, посвященные актуальным техническим или физическим темам широкого значения.

Для советского учителя, решающего задачу политехнизации математического курса средней школы, отмеченные явления в английской математике, несомненно, представляют интерес.

треугольника, методическая заметка об изложении одного из вопросов планиметрии, любопытное свойство некоторых целых чисел, площадь треугольника, заданного уравнениями сторон и др.

В содержании библиографического отдела журнала видно очень большое внимание редакции к этому участку своей работы. Речь идет не только о большом количестве рецензий и широком охвате ими интернациональной математической научной и учебной литературы (кроме 17 английских книг здесь рассмотрены восемь немецких, по пять французских и американских, одна индийская и одна итальянская<sup>1)</sup>), но и о привлечении в качестве рецензентов наиболее квалифицированных английских специалистов; мы встречаем тут имена известных математиков: А. Э. Ингема, Х. Т. Х. Пиаджо, Э. К. Титчмарша, Дж. К. К. Уайтхеда, Дж. М. Уиттекера и др., а также видных методистов А. П. Роллета, Ф. Буна, Ч. Дельтри, Э. Х. Нэвилля, редактора журнала Т. А. А. Бродбента и др. По своему характеру и содержанию рецензии обращены к читателю (а не к автору или издателю рецензируемой книги, как это часто бывает) и имеют целью прежде всего помочь ему использовать всё то хорошее, что есть в книге, не замалчивая в то же время ее недостатков. Объективные, сжатые по форме, но содержательные рецензии и аннотации в «Математической газете» в значительной степени способствовали росту авторитета этого журнала среди его читателей.

В годы второй мировой войны ассоциация была вынуждена прекратить остальные массовые формы своей деятельности, но ей удалось ценой больших усилий сохранить свой печатный орган. Однако объем и частоту выхода журнала пришлось в это время сильно сократить. В послевоенные годы «Математическая газета» стала понемногу увеличиваться в объеме, но из-за острого бумажного голода в стране и возросшей стоимости типографских работ всё еще не смогла вернуться к предвоенному уровню.

Рассмотрим один из типичных по содержанию номеров журнала за послевоенное десятилетие — № 321 (сентябрь 1953 г.).

Внешний облик номера тот же, что и до войны — томик в строгой серой обложке в  $\frac{1}{8}$  долю листа. Но вместо прежних 120 страниц в нем только 80. Чтобы компенсировать потерю объема, весь материал журнала напечатан мелким шрифтом.

В этом номере помещены: президентский адрес 1953 г., три научные статьи, отдел математических заметок (13 сообщений), библиографический отдел (26 рецензий и аннотаций), письма в редакцию.

Мы остановимся подробно на президентском адресе известного английского педагога-математика А. С. Снелла. Тема адреса «Школьная математика сегодня и завтра».

---

<sup>1)</sup> К сожалению, советская учебно-математическая литература почти не получила отражения в «Математической газете», несмотря на большой интерес к ней со стороны английских читателей журнала. В послевоенное время «Математическая газета» систематически информирует о книгах советских математиков, выходящих в иностранных переводах.

После своеобразного вступления — фантастической картины состояния математического преподавания в начальной и средней школе «через 50 лет», описанной в иронически утрированной форме, Снелл переходит в уже более реалистической манере к оценке ближайших перспектив школьной математики в Англии<sup>1)</sup>.

Как и Хогбен в рассмотренном выше адресе 1938 г., Снелл отмечает, что дальнейший прогресс в постановке преподавания арифметики упирается в Англии в проблему перехода к метрической системе мер. Если этот переход осуществится, то курс арифметики в английской школе претерпит существенные изменения: отпадут громоздкие вычисления, отойдут на задний план простые дроби, место которых займут дроби десятичные и т. п.

Особого внимания заслуживают высказывания Снелла относительно постановки преподавания геометрии. Констатируя, что за последние 50 лет в этой области в Англии произошло «слишком много изменений», Снелл считает необходимым серьезно пересмотреть установившиеся здесь тенденции. Он указывает прежде всего на чрезмерное принижение роли теории (логической дедукции). В настоящее время школьный курс геометрии сводится почти исключительно к упражнению учащихся в масштабном черчении и в решении чисто вычислительных задач (после сообщения им на ранней стадии, без строгого вывода, теоремы Пифагора и тригонометрических отношений). Рассматривая эти моменты как два необходимых последовательных этапа, Снелл настаивает на том, чтобы курс завершался третьим этапом более теоретического характера.

Перейдя к вопросу о преподавании геометрии учащимся, специализирующимся по математике, Снелл отметил, что здесь директивное значение имеет недавно изданный «Третий геометрический отчет» Учебного комитета ассоциации. До этой директивы в классах этой специальности преподавались две отдельные дисциплины: «Новая чистая геометрия» (элементы геометрии треугольника, учение о полюсе и полярности для окружности, гармонические четверки и ангармоническое отношение, инверсия, полярные преобразования, геометрия тетраэдра, учение об ортогональной, конической и других проекциях) и «Аналитическая геометрия» (прямая, окружность, конические сечения в канонических уравнениях, общее уравнение второй степени). Теперь они сливаются в единый курс «Высшей геометрии», ведущая роль в котором отводится аналитическим методам. Этот курс доставит учащимся хорошую подготовку к современному университетскому курсу многомерной аналитической геометрии, но в практике его осуществления имеется сильная опасность, что чисто геометрические методы окажутся при этом совершенно вытесненными аналитическими. Снелл предостерегает против этой крайности, указывая, что для воспитания оригинального творческого математического мышления хорошая школа чисто геометрических методов сохраняет первостепенное значение. Наконец, он высказывается за ознакомление более успеваю-

<sup>1)</sup> Значительная часть адреса посвящена начальной школе.

циях учащихся — «математических специалистов» — и с чисто проективными геометрическими методами.

Переходя к преподаванию алгебры и анализа в школе, Снелл положительно оценивает установившуюся практику сокращения времени на прохождение тождественных преобразований. Правда, приступая затем к изучению математического анализа, учащиеся испытывают затруднения в алгебраической технике, но с этим явлением можно бороться путем попутного (с изучением анализа) повторения соответствующего алгебраического материала; такое повторение протекает быстро и заинтересовывает учащихся, видящих теперь яснее значение техники алгебраических преобразований.

Из курса алгебры в английской школе сейчас устранены цепные дроби и элементы теории чисел. Снелл отмечает, однако, что эти предметы можно использовать как благодарный материал для самостоятельных занятий более активных учащихся, стремящихся выйти за рамки обязательной школьной программы.

Снелл подчеркивает значение комплексных чисел в алгебре и тригонометрии как аппарата, объединяющего эти две дисциплины. Он рекомендует также не бояться знакомить учащихся с началами теории элементарных функций комплексного переменного (формулы Эйлера, логарифмы комплексных чисел). По мнению автора, вообще очень желательно, чтобы учащийся мог немного заглянуть вперед, увидеть перед собой некоторую перспективу изучаемого предмета; тогда он с большим интересом отнесется к его систематическому изучению.

О постановке в английской школе преподавания дифференциального и интегрального исчисления мы находим у Снелла следующие интересные данные.

В настоящее время в Англии признается наиболее рациональным концентрическое прохождение элементов математического анализа в школе. Обычно практикуются следующие три концентрира.

В большей части грамматических школ изучается первый концентр, ограничивающийся дифференцированием и интегрированием (собственно — антидифференцированием) лишь простейших степенных функций. Здесь рассматривается множество подходящих примеров физического и геометрического содержания. «Кульминационным пунктом» этого начального концентрира считается вывод путем интегрирования формулы объема шара и т. п.

Учащиеся, специализирующиеся по естественным наукам, технике или математике, проходят второй концентр, который включает распространение дифференциального исчисления на остальные классы элементарных функций, простейшие способы интегрирования, понятие об определенном интеграле как пределе интегральной суммы и его связь с понятием неопределенного интеграла. Для естественников материал этого концентрира дополняется вычислением простейших двойных и тройных интегралов и понятием о рядах Фурье в связи с вопросом определения функции, заданной экспериментальной кривой. Основное внимание

в течение второго концентр уделяется прочному овладению учащимися техникой исчисления; погоня за строгостью выводов считается здесь педагогически вредной, тормозящей движение вперед изучающего предмет. (Позиция, близкая к знаменитому взгляду Даламбера! <sup>1)</sup>.) Однако признается желательным, чтобы нестрогие моменты доказательств оглаживались, чтобы делаемые (без доказательства) допущения точно формулировались.

Второй концентр анализа играет роль ядра, вокруг которого на данном этапе группируются все остальные математические предметы.

Третий концентр рассчитан на наиболее способных учащихся, специализирующихся по математике. Задача этого концентра — ввести учащихся в область идей строгого обоснования основных понятий анализа: уточнение и углубленное изучение понятий предела, непрерывности, дифференцируемости и т. д.

В конце своего адреса Снелл остановился на вопросах, связанных с преподаванием прикладной математики в английской школе. Последняя состоит из механики, иногда гидростатики и — в последнее время — небольшого курса статистики. Снелл обращает внимание на необходимость пересмотреть то гипертрофированное значение, которое придается механике при экзаменах на аттестат зрелости, — по этому предмету экзаменующимся приходится выполнять столько же письменных работ, сколько по всем остальным математическим дисциплинам вместе взятым.

Курс механики в грамматической школе состоит из трех концентров, из которых первый (посвященный преимущественно статике) носит совершенно элементарный характер, тогда как третий, по мысли Снелла, должен подводить учащихся к современным идеям в механике, особенно к теории относительности; в связи с этим здесь же предусматривается ознакомление учащихся с существованием неевклидовых геометрий.

Мы сравнительно подробно изложили содержание адреса Снелла, так как он отчетливо обрисовывает постановку различных частей курса математики в английской школе и дает понятие о намечающихся здесь новых тенденциях. Рассмотрим теперь бегло и другие статьи этого номера «Математической газеты».

Большая статья Р. Х. Кобба посвящена предлагаемой им оригинальной системе символических обозначений (отчасти сходных с функциональными) в геометрии треугольника; эта система позволяет сжато записывать выводы и облегчает нахождение новых результатов в этой области.

К геометрической тематике относятся здесь и две другие статьи: Дж. Тейлора (о некоторых новых геометрических экстремальных задачах) и Э. Х. Невилля (удачная методическая разработка темы «инволюция» в курсе высшей геометрии).

«Математические заметки» в этом номере очень разнообразны; некоторые из них посвящены очень специальным вопросам: геометрические

<sup>1)</sup> См. статью В. Ф. Кагана, приведенную в списке на стр. 87.



задачи (рассмотренные в связи с исследованиями Ельмслева по теории конгруэнтности), применения циклоиды в кинематике, доказательство несуществования равнобедренного треугольника с целочисленными сторонами и медианами, упрощенное доказательство теоремы о том, что все достаточно большие числа допускают представление в виде суммы не более восьми кубов; нахождение алгебраических аппроксимаций функции  $\ln \frac{x+1}{x-1}$  в случае  $|x| > 1$ , исследование деформации кругового кольца, изучение эффекта диэлектрического цилиндра в электростатическом поле и др.

В библиографическом отделе рассмотрены 26 книг (14 английских, шесть американских, три немецкие, две голландские и одна французская). Из них 17 представляют собой научные монографии или учебные руководства для высшей школы, а остальные девять — учебники и пособия для учащихся средних школ. Как и до войны, рецензии немногословны, но объективны и четко раскрывают особенности рассматриваемой книги.

Дополним наш краткий обзор содержания двух номеров «Математической газеты» некоторыми общими замечаниями об этом журнале.

При той широкой программе, которую продолжает сохранять журнал, его объем безусловно очень тесен. Редакция «Математической газеты» отнюдь не испытывает недостатка в материале и могла бы вдвое увеличить объем издания, если бы это позволяли финансовые возможности ассоциации. Последние, однако, очень скромны — единственным источником средств являються здесь членские взносы; какой-либо субсидии ассоциация не получает.

Согласно неоднократным заявлениям редакции ее программа предусматривает одинаковое внимание к научным и к методическим интересам читателей. Фактически, однако, особенно в последние годы, методическая часть журнала явно беднее научной. Вина в этом лежит, вероятно, не на редакции: вместо того чтобы писать методические статьи, английские педагоги предпочитают участвовать в систематически проводимых дискуссиях и составлять новые учебники. Как известно, английская учебная литература по математике в количественном отношении самая богатая в мире, и рост ее продолжается с неослабевающим темпом. Большое разнообразие английской школьной системы и широкая автономия отдельных школ издавна способствовали возникновению в Англии большого спроса на новые учебные руководства.

Что касается содержания журнала в его научной части, то оно отличается разнообразием, актуальностью тематики и при достаточно высоком уровне стремлением к возможно большей доступности изложения. Редакция горячо защищает принцип необходимости живого, непосредственного контакта учителя с развивающейся наукой; это понимается не в смысле пассивного «общего ознакомления» с новыми идеями в науке, а главным образом в смысле личного участия учителя в активной разработке какой-либо — пусть очень скромной — научной

проблемы. Нужно вместе с тем с сожалением отметить, что в журнале наблюдается недостаток материалов по истории математики<sup>1)</sup>. Большим пробелом является отсутствие в журнале отдела задач.

Одна специальная черта редакционной «политики» «Математической газеты» заслуживает быть особо отмеченной. В свое время К. Г. Якоби с горечью отмечал, что работы, помещенные в периодической печати, вскоре оказываются в ней похороненными. Редакция «Математической газеты» порывает с этой печальной традицией, время от времени воскрешая наиболее ценные из материалов, напечатанных в старых номерах журнала. Так, содержание юбилейного 300-го номера (1948) составилось главным образом из вновь перепечатанных статей Лэнгли, Уайтхэда, Хизса, Харди, Гринстрита и Рэсселя.

В 1956 г., после 25-летнего служения на посту редактора печатного органа ассоциации, Т. А. А. Бродбент вышел в отставку. Новым редактором «Математической газеты» является профессор Р. Л. Гудстейн — активный сотрудник журнала, много писавший в нем последние годы по вопросам математической логики.

Мы обозрели в общих чертах деятельность английской Математической ассоциации. Чтобы правильно оценить значение этой деятельности для английской школы, нужно иметь в виду, что последние 80 лет именно в рамках этой «частной» организации протекает вся основная общественная работа в области методики математики в Англии. В 1948 г. президент ассоциации проф. Дж. Б. Джеффри с полным правом сказал:

«Я не знаю ни одного школьного предмета, преподаватели которого действовали бы с таким же сильным чувством профессионального долга и посвятили столько же времени и энергии улучшению его преподавания, как это сделали члены Математической ассоциации».

И если в сложных условиях консервативной английской школьной организации Математической ассоциации удалось добиться успехов в деле улучшения в стране математического преподавания, то этим она во многом обязана тому крепнущему единению науки и педагогики, которое получило свое воплощение уже в составе этой ассоциации: «Счастье нашей ассоциации в том, — отмечал Дж. Б. Джеффри, — что в ней смешались два потока — тех, которые интересуются математикой как великой областью научного знания, и тех, которые видят в математике могучее орудие образования».

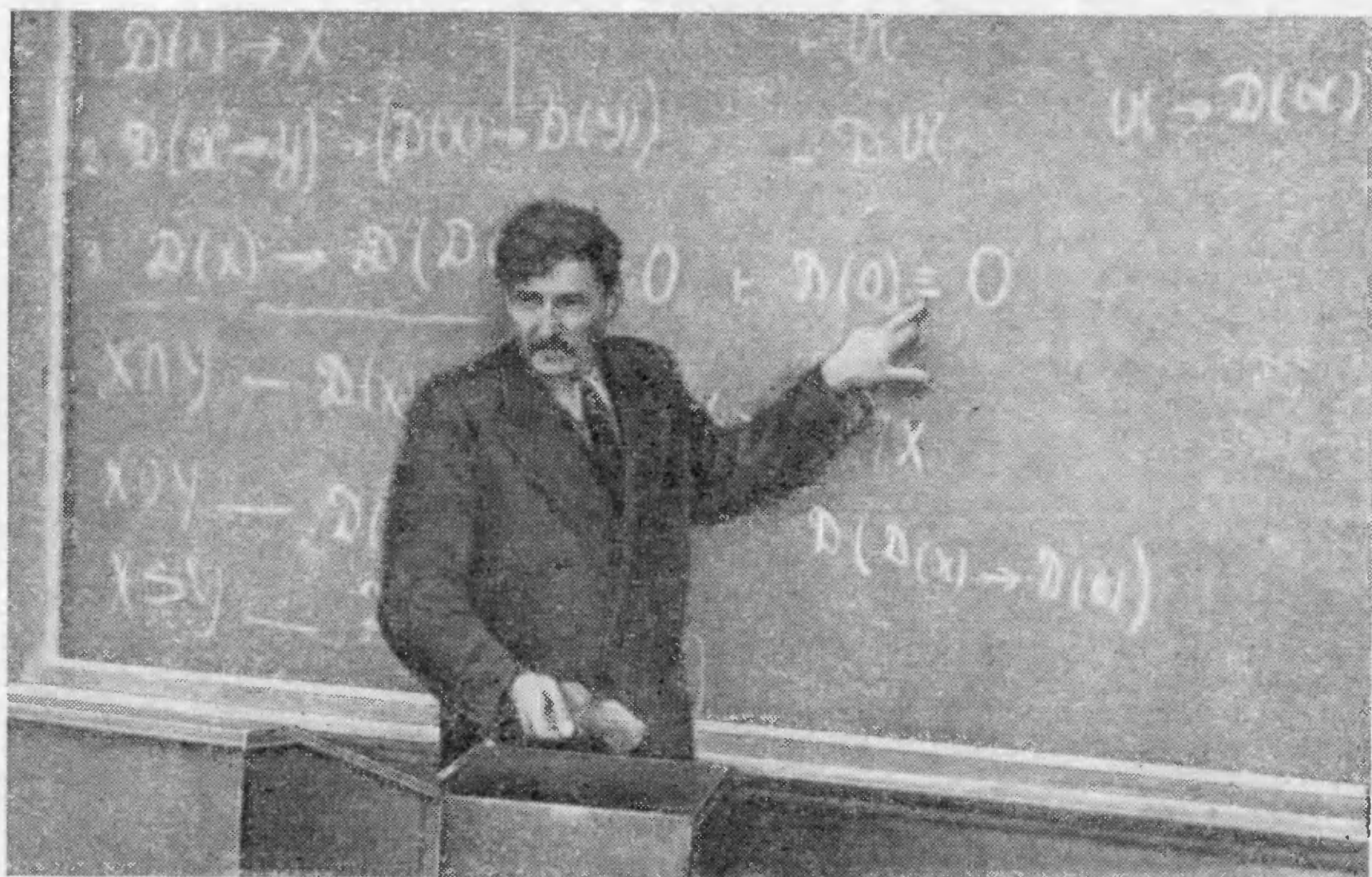
Нет сомнения, что критический учет советскими педагогами-математиками опыта их английских коллег может принести ценные плоды.

---

<sup>1)</sup> Правда, в последнее время в журнале стали изредка появляться заметки, связанные с теми или иными памятниками английской математической истории.

них переводится в другое посредством последовательности элементарных преобразований группы, заключающихся в том, что рядом стоящие буквы  $a_i a_i^{-1}$  или  $a_i^{-1} a_i$  можно отбрасывать, а любую последовательность букв  $A_j$  внутри слова можно заменить последовательностью букв  $B_j$ .

**Проблема тождества слов** в теории групп заключается в том, чтобы найти алгоритм, который позволял бы для каждой произвольной пары слов  $X$  и  $Y$  какой-либо группы  $F$  определить, равны ли они в группе  $F$  или нет.



П. С. НОВИКОВ.

П. С. Новиков на основе разработанных им теорий преобразований слов в группах сумел построить конкретную систему с неразрешимой проблемой тождества. Этим он доказал неразрешимость (в общем виде) классической проблемы тождества в теории групп. Опираясь на полученный результат и используя разработанный им метод, П. С. Новиков доказал неразрешимость родственных проблем — **проблемы сопряженности** и **проблемы изоморфизма** (вопроса о том, изоморфны ли — т. е. одинаковы ли по существу — две группы, заданные своими образующими элементами и определяющими соотношениями). Эти проблемы в алгебре стояли давно; однако все попытки их решения оказывались неудачными. Теперь, после того как П. С. Новиков доказал неразрешимость этих проблем, ясно, что удачными такие попытки оказаться и не могли.

В последнее время ученики П. С. Новикова, используя его методы, доказали неразрешимость широкого класса алгоритмических проблем теории групп. Число исследований, опирающихся на работу П. С. Новикова, все время возрастает и полнота полученных результатов увеличивается.

---

## II. НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

---

### О ЧИСЛЕ ПОЛУПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

В. Г. Ашкинзуе

(Шахты)

Многогранник называется *топологически полуправильным*, если звёзды всех его вершин изоморфны между собой<sup>1)</sup>. Многогранник называется (метрически) *полуправильным*, или *архимедовым*, если все его многогранные углы равны между собой, а все грани являются правильными многоугольниками. Очевидно, всякий архимедов многогранник является топологически полуправильным. Известно, что для всякого топологически полуправильного многогранника существует единственный (с точностью до подобия) изоморфный ему архимедов многогранник.

Теорема Эйлера (о многогранниках) позволяет перечислить все возможные типы звезд топологически полуправильных многогранников, а также определить для каждого типа число граней, ребер и вершин соответствующих многогранников. В результате оказывается, что возможны две бесконечные серии различных типов звезд, зависящие каждая от одного натурального параметра (эти серии соответствуют призмам и антипризмам), и, кроме того, еще 13 типов звезд. Все возможные типы звезд топологически полуправильных многогранников перечислены в «Курсе элементарной геометрии» Д. И. Перепелкина<sup>2)</sup>.

Обычно указывается<sup>3)</sup>, что каждый из возможных типов звезды однозначно (с точностью до изоморфизма) определяет соответствующий топологически полуправильный многогранник. Отсюда, в частности, следует, что, кроме призм и антипризм, существует всего 13 архимедовых многогранников. Однако в действительности, как мы увидим

---

<sup>1)</sup> Звездой некоторой вершины многогранника называется совокупность всех граней многогранника, примыкающих к этой вершине, а также всех вершин и ребер, принадлежащих этим граням. Две звезды (или два многогранника, или, вообще, две многогранные поверхности) называются *изоморфными*, если между их гранями, ребрами и вершинами можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее инцидентность.

<sup>2)</sup> Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, т. II, § 169, Гостехиздат, М.—Л., 1949.

<sup>3)</sup> См., например, стр. 296 книги Перепелкина.

далее, изоморфизм топологически полуправильных многогранников, имеющих изоморфные звезды, не всегда имеет место, а потому и число архимедовых многогранников больше, чем обычно считается.

Остановимся поэтому подробнее на вопросе о единственности топологически полуправильного многогранника с данным типом звезды каждой его вершины.

Рассмотрим в качестве примера топологически полуправильный многогранник, каждая звезда которого содержит четыре треугольные

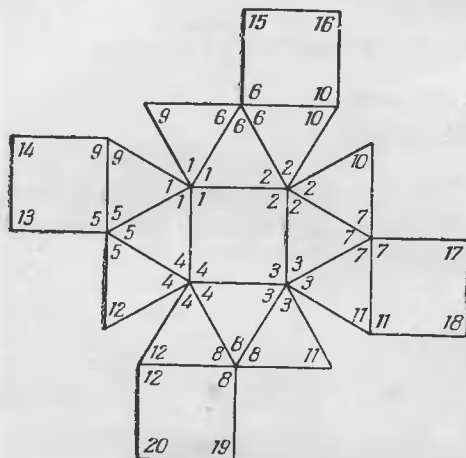


Рис. 1.

и одну четырехугольную грани<sup>1)</sup>; этот многогранник имеет 38 граней (из которых 32 треугольные и шесть четырехугольных), 60 ребер и 24 вершины<sup>2)</sup>. Наметим доказательство того, что такой многогранник действительно единственен (с точностью до изоморфизма). Для этого будем последовательно конструировать нужный многогранник из его граней; для простоты изображения мы будем на чертежах каждый раз давать *развертку* построенной части многогранника.

Рассмотрим произвольную четырехугольную грань многогранника и обозначим ее верши-

ны последовательно цифрами 1, 2, 3, 4. Так как каждая вершина многогранника принадлежит только одной четырехугольной грани, все остальные грани, примыкающие к вершинам 1, 2, 3 и 4, должны быть треугольными. В частности, грани, смежные с четырехугольником 1234, должны быть треугольниками; вершины их занумеруем так, как указано на рис. 1<sup>3)</sup>.

Покажем, что все точки 1, 2, ..., 8 являются различными вершинами многогранника. Действительно, вершина 5, например, не может совпадать с вершиной 6, ибо иначе грани 145 и 126 были бы смежными и звезда вершины 6 содержала бы лишь две треугольные грани (вместо четырех); по аналогичной причине вершина 5 не может совпадать и с вершиной 8. Наконец, если бы вершина 5 совпала с верши-

<sup>1)</sup> В таблице, приведенной в книге Перепелкина на стр. 296 и содержащей всевозможные типы звезд топологически полуправильных многогранников, этот тип звезды значится под № 11.

<sup>2)</sup> См. стр. 293—295 книги Перепелкина.

<sup>3)</sup> Для того чтобы сократить число чертежей, мы даем сразу довольно сложный окончательный чертеж; однако читатель должен пока принимать во внимание лишь центральную четырехугольную грань и четыре примыкающих к ней треугольников; о других гранях будет сказано в своем месте.

ной 7, то хотя одно из ребер 15, 45, 27 и 37 должно было бы быть вершинной четырехугольной грани, примыкающей к вершине 5 (ибо в каждой вершине сходятся всего пять ребер); но в таком случае другой вершиной этой грани должна являться одна из точек 1, 2, 3 или 4, что невозможно, потому что ни к одной из этих вершин не может примыкать двух четырехугольных граней.

Далее, к каждой из вершин 1, 2, 3, 4 должны примыкать, кроме упомянутых до сих пор, еще две треугольные грани, смежные с уже рассмотренными треугольными гранями, а также между собой. Обозначим вершины всех этих граней через 9, 10, 11 и 12, как это указано на рис. 1. Легко видеть, что все эти вершины различны между собой. В самом деле, если бы, например, вершина 9 совпадала с вершиной 11, то в этой вершине сходились бы шесть ребер: 91, 95, 96, (11)3, (11)7, (11)8; следовательно, хотя бы два из этих ребер должны были бы совпасть между собой, а значит, должны были бы совпасть между собой хотя бы две из вершин 1, 3, 5, 6, 7, 8, что, как доказано выше, невозможно. Далее, ни одна из вершин 9, 10, 11, 12 не может совпасть ни с одной из вершин 5, 6, 7, 8, так как в противном случае в совпавшей вершине сходились бы пять треугольных граней; наконец, ни одна из вершин 9—12 не может совпасть ни с одной из вершин 1—4. Таким образом, все вершины 1—12 различны между собой.

Рассмотрим теперь вершину 5. К ней должны примыкать, кроме фигурировавших до сих пор, еще одна треугольная и одна четырехугольная грань, причем одна из этих граней должна иметь стороной ребро 59, а другая — ребро 5(12); мы можем считать, что стороной четырехугольной грани является ребро 59. Тогда как к вершине 9 не может примыкать двух четырехугольных граней, то четырехугольная грань, примыкающая к вершине 6, должна иметь своей стороной ребро 6(10); аналогично четырехугольные грани, примыкающие к вершинам 7 и 8, должны иметь сторонами соответственно ребра 7(11) и 8(12). Обозначим вершины этих четырехугольных граней так, как указано на рис. 1, и покажем, что все вершины 13—20 различны между собой и отличны от всех ранее занумерованных вершин.

Покажем, например, что вершина 13 отлична от всех занумерованных другими номерами вершин. Заметим прежде всего, что вершина 13 не может совпадать ни с одной из вершин 1—4, так как в каждой из этих вершин уже имеются все пять граней; вершина 13 не совпадает также ни с одной из вершин 5, 9 и 14. Далее, вершина 13 не может совпадать с вершиной 12, так как в противном случае ребро 5(13) совпало бы с ребром 5(12) и в вершине 5 сходились бы три треугольные грани, а не четыре. Вершина 13 не может совпадать ни с вершиной 6, так как в таком случае ребро 96 совпало бы с диагональю (13)9 грани 59(14)(13); аналогично доказывается, что вершина 13 не может совпасть и с вершиной 8.

Допустим, что вершина 13 совпадает с вершиной 7. Так как к каждой вершине примыкает единственная четырехугольная грань, то в этом

случае четырехугольник  $59(14)(13)$  должен совпасть с четырехугольником  $7(11)(18)(17)$ ; следовательно, вершина 5 должна совпасть с вершиной 17 (она не может совпасть с вершиной 11, так как все вершины 1—12 различны). Рассматривая теперь звезду вершины 7 (рис. 2, а), видим, что ребра  $7(10)$  и  $75$  должны быть сторонами одной треуголь-

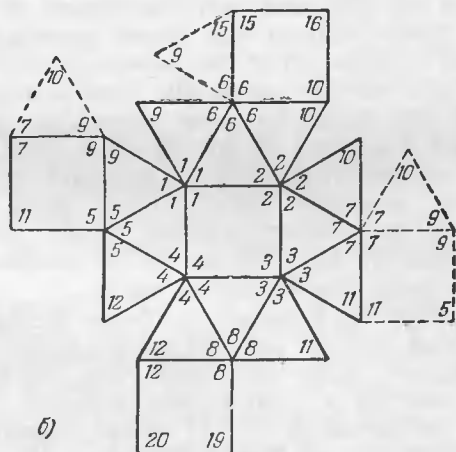
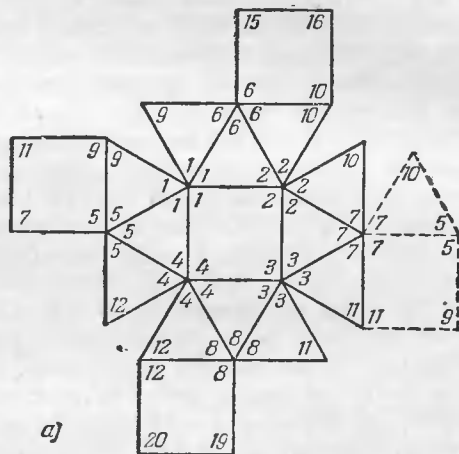


Рис. 2.

ной грани; следовательно, в вершине 5 сходятся шесть различных ребер:  $51, 54, 57, 59, 5(10), 5(12)$ , что невозможно.

Если вершина 13 совпадает с вершиной 10, то вершина 14 совпадает с вершиной 6; тогда звезда вершины 9 будет содержать только три грани  $95(13)6, 951$  и  $916$ , что также невозможно.



Пусть теперь вершина  $13$  совпадает с вершиной  $11$ ; тогда вершина  $14$  должна совпадать с вершиной  $7$  (рис. 2, б). Рассматривая звезду вершины  $7$ , легко обнаружить, что ребра  $7(10)$  и  $79$  должны быть сторонами одной треугольной грани. То же самое можно сказать о ребрах  $69$  и  $6(15)$  в звезде вершины  $6$ . Теперь в звезде вершины  $9$  имеются пять различных граней. Следовательно, «свободные» ребра этих граней — ребра  $9(10)$  и  $9(15)$  — должны совпасть между собой, т. е. вершина  $10$  должна совпадать с вершиной  $15$ , что, очевидно, невозможно.

Таким образом, вершина  $13$  не совпадает ни с одной из вершин  $1—12$ .

Допустим, наконец, что вершина  $13$  совпадает с одной из вершин  $14—20$ , например с вершиной  $17$ . Тогда, как и выше, грань  $(13)(14)95$  должна совпасть с гранью  $(17)(18)(11)7$ , причем вершина  $9$  первой из этих граней, противоположная вершине  $13$ , должна совпасть с вершиной  $11$  второй грани. Но это невозможно, так как нами было доказано, что вершины  $1—12$  все различны.

Все изложенные выше рассуждения могут быть проведены и для любой из вершин  $15, 17, 19$ ; аналогично доказывается, что ни одна из вершин  $14, 16, 18, 20$  не совпадает с вершиной с другим номером. Таким образом, действительно, все вершины  $1—20$  различны между собой.

Рассматривая на рис. 1 звезду вершины  $5$ , видим, что ребра  $5(13)$  и  $5(12)$  должны быть сторонами одной треугольной грани  $5(13)(12)$ ; такое же положение имеет место и для звезд вершин  $6, 7, 8$  (см. рис. 3). Рассматривая затем звезду вершины  $9$ , получим, что ребра  $9(14)$  и  $9(15)$  должны быть сторонами одной треугольной грани  $9(14)(15)$ ; такое же положение имеет место и для звезд вершин  $10, 11$  и  $12$ . Таким образом, к четырехугольной грани  $5(13)(14)9$ , кроме треугольной грани  $591$ , примыкают еще грани  $5(13)(12)$  и  $9(14)(15)$  (рис. 3); такое же положение имеет место и для граней  $6(15)(16)(10)$ ,  $7(17)(18)(11)$  и  $8(19)(20)(12)$ .

Далее, к ребрам  $(13)(14)$ ,  $(15)(16)$ ,  $(17)(18)$  и  $(19)(20)$  четырехугольных граней должны примыкать еще по одной треугольной грани. Обозначим новые вершины этих граней цифрами  $21, 22, 23$  и  $24$  и покажем, что эти вершины все различны между собой и отличны от ранее занумерованных вершин.

Покажем, например, что вершина  $21$  отлична от всех вершин с другими номерами. Прежде всего очевидно, что вершина  $21$  не может совпадать ни с одной из вершин  $1—12$ , так как в каждой из этих вершин уже имеются все пять граней, причем все они отличны от грани  $(13)(14)(21)$ . Далее, вершина  $21$  не может совпадать ни с вершиной  $13$ , ни с вершиной  $14$ , ни с вершиной  $15$  (в последнем случае звезда вершины  $14$  содержала бы только три грани).

Если вершина  $21$  совпадает с вершиной  $17$ , то, так как к вершине  $17$  должно примыкать пять различных граней, одна из вершин  $13$



или 14 должна совпадать с вершиной 16, что невозможно. Точно так же обнаруживается, что вершина 21 не может совпасть с вершиной 19.

Допустим теперь, что совпадают вершины 21 и 16. Так как в вершине 16 должно сходиться только пять ребер, то одно из ребер, (21)(13) или (21)(14) должно совпадать с одним из ребер (16)(22) или (16)(17). Но с вершиной 17 по доказанному не может совпадать ни вершина 13, ни вершина 14; следовательно, одна из этих вершин должна совпасть с вершиной 22. Но если вершина 22 совпадает с вершиной 14, то в вершине 15 сходятся всего четыре ребра — (15)6, (15)9, (15)(16) и (15)(14) [оно же (15)(22)]; если же вершина 22 совпадает с вершиной 13, то в вершине 13 сходятся шесть различных ребер: (13)5, (13)(12), (13)(14), (13)(15), (13)(16) и (13)(20), что также невозможно.

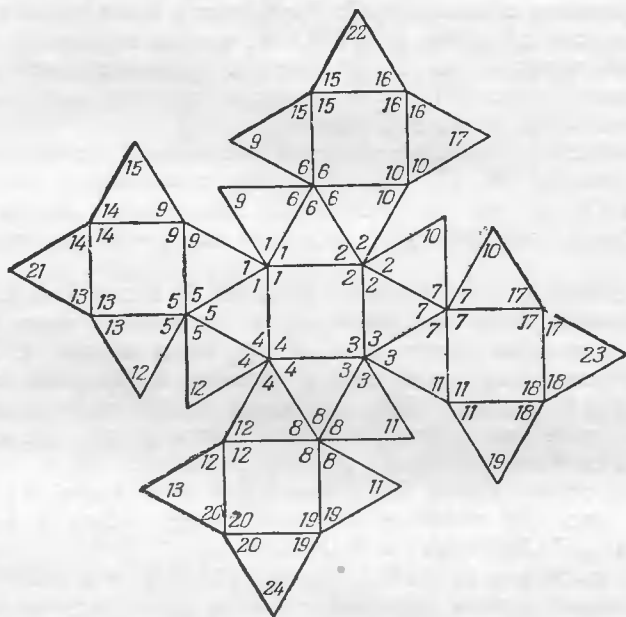


Рис. 3.

Предположим, что вершина 21 совпадает с вершиной 18. Тогда, как и в предыдущем случае, вершина 23 должна совпасть с одной из вершин 13 или 14. Но вершины 23 и 13 не могут совпадать (это обнаруживается так же, как выше было доказано, что вершина 21 не совпадает с вершиной 17); следовательно, вершина 23 должна совпасть с вершиной 14. Рассматривая теперь звезду вершины 14, видим, что ребра 14(17) и (14)(15) должны быть сторонами одной треугольной грани, т. е. должно иметься ребро (15)(17), которое, очевидно, должно совпадать с одним из ребер (15)(14) или (15)(22). Однако совпадение с первым из этих ребер невозможно. Отсюда следует, что

вершина 22 совпадает с вершиной 17; но в таком случае звезда вершины 16 содержит только три грани, что невозможно.

Допустив, что вершина 21 совпадает с вершиной 20, мы получим, что звезда вершины 13 содержит только четыре грани. Наконец, если вершина 21 совпадает с одной из вершин 22—24, например с вершиной 23, то в вершине 23 должно сходиться всего пять ребер; четырехугольная грань, примыкающая к вершине 21, должна иметь одной из своих сторон одно из четырех ребер:  $(21)(13)$ ,  $(21)(14)$ ,  $(23)(17)$ ,  $(23)(18)$ . Но это невозможно, так как к каждой из вершин 13, 14, 17 и 18 уже примыкает четырехугольная грань, не примыкающая к вершине 23.

Итак, все обозначенные на рис. 3 вершины рассматриваемого многогранника различны между собой. А так как наш многогранник имеет всего 24 вершины, то этими вершинами исчерпываются все вершины многогранника.

Далее, к ребру  $(13)(21)$  должна примыкать, кроме грани  $(13)(14)(21)$ , еще одна треугольная грань, причем, рассматривая звезду вершины 13, видим, что вершина указанной грани, отличная от вершин 13 и 21, должна совпадать с вершиной 20. Рассматривая аналогичным образом звезды вершин 15, 17 и 19, получим, что грани, примыкающие к ребрам  $(15)(22)$ ,  $(17)(23)$  и  $(19)(24)$ , должны иметь своими третьими вершинами соответственно точки 14, 16 и 18 (рис. 4). Таким же путем, рассматривая звезды вершин 14, 16, 18 и 20, получим еще и треугольные грани, также изображенные на рис. 4.

Теперь мы имеем уже все 32 треугольные грани многогранника и пять четырехугольных граней, причем к каждой из вершин 1—20 примыкает по одной четырехугольной и по четыре треугольные грани. К каждой из вершин 21—24 примыкает по четыре треугольные грани.

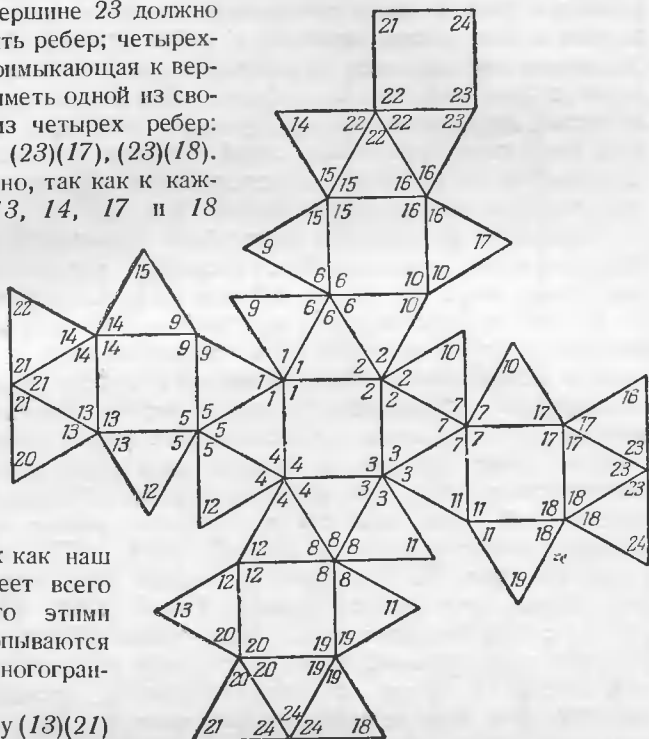


Рис. 4.

Следовательно, точки 21, 22, 23 и 24 являются вершинами единственной оставшейся четырехугольной грани. Таким образом, рис. 4 изображает полную развертку рассматриваемого многогранника.

Все приведенные рассуждения показывают, что при данном типе звезды (содержащей одну четырехугольную и четыре треугольные грани) развертка топологически полуправильного многогранника вместе с указаниями о том, какие вершины и ребра должны быть склеены при склеивании многогранника из развертки, определяется единственным образом (с точностью до изоморфизма). Это и означает, что все топологически полуправильные многогранники, имеющие звезду рассмотренного типа, изоморфны между собой. Отсюда вытекает единственность (с точностью до подобия) соответствующего архимедова многогранника. Этот многогранник изображен на рис. 5.

Подобными же методами может быть установлена<sup>1)</sup> единственность полуправильного многогранника, имеющего звезду любого из возможных типов, кроме одного, на котором мы и остановимся.

Рассмотрим топологически полуправильный многогранник, к каждой вершине которого примыкают три четырехугольные и одна треугольная грань<sup>2)</sup>. Всего этот многогранник имеет 24 вершины, 48 ребер и 26 граней (из которых 18 четырехугольных и восемь треугольных). Покажем прежде всего, что среди четырехугольных граней этого многогранника найдутся такие, которые не смежны ни с одной треугольной гранью. Рассмотрим произвольную треугольную грань 123 многогранника. Звезды вершин этой грани определяют, очевидно, «пояс» из шести попарно смежных четырехугольников 1(12)45, 1562, 2678, 2893, 39(10)(11), (11)31(12) (рис. 6). Покажем, что среди этих шести четырехугольных граней уже имеется искомая. Грани 1265, 2398 и 13(11)(12) смежны с треугольником 123. Пусть грань 2678 также смежна с некоторым треугольником, причем их общей стороной является, например, ребро 78. Тогда к ребру 89 должна примыкать, кроме грани 2398, еще одна четырехугольная грань, и, как вытекает из рассмотрения звезды вершины 9, грань 39(10)(11) должна быть смежной по ребру 9(10) с треугольной гранью (рис. 6). Докажем, что грань 154(12) не смежна ни с одним треугольником. Допустим, что это не так; пусть грань 154(12) смежна с треугольной гранью, например, по ребру 45. Тогда к грани 1265 по ребру 65 должна примыкать четырехугольная грань (рис. 7, а). Но тогда из рассмотрения звезды вершины 6 видно, что к грани 2678 примыкает треугольная грань, что, однако, невозможно, так как к вершине 7 не могут примыкать две треугольные

<sup>1)</sup> Мы не приводим доказательства этого утверждения в остальных случаях, так как это было бы слишком громоздко. По идее доказательство для любого другого типа звезды вполне аналогично приведенному выше и при желании может быть легко проведено читателем.

<sup>2)</sup> В уже упоминавшейся таблице на стр. 296 II части книги Перепелкина этот тип звезды значится под № 8.

21, 22, 23 и 24 являются вершинами единственной четырехугольной грани. Таким образом, рис. 4 изоморфизма рассматриваемого многогранника.

Рассуждения показывают, что при данном типе звезды четырехугольную и четыре треугольные грани) полуправильного многогранника вместе с указанными вершинами и ребрами должны быть склеены при склеивании из развертки, определяется единственным образом (изоморфизма). Это и означает, что все топологически эквивалентные многогранники, имеющие звезду рассмотренного типа, являются изоморфными. Отсюда вытекает единственность соответствующего архимедова многогранника. Доказано на рис. 5.

Доказательство может быть установлено<sup>1)</sup> единственность многогранника, имеющего звезду любого из возможных типов, на котором мы и остановимся.

Рассмотрим полуправильный многогранник, к каждой из вершин которого примыкают три четырехугольные и одна треугольная грани. Такой многогранник имеет 24 вершины, 48 ребер и 26 граней (12 четырехугольных и восемь треугольных). Покажем, что все грани четырехугольные. Пусть грани не смежны ни с одной треугольной гранью. Тогда каждая четырехугольная грань имеет две смежные с ней треугольные грани. Звезды вершин, очевидно, «пояс» из шести попарно смежных граней. Покажем, что среди этих шести четырехугольных граней нет смежных. Грани 1265, 2398 и 13(11)(12) смежны с гранью 123. Пусть грань 2678 также смежна с ней. Тогда грань 89 должна примыкать к ребру 89, причем их общей стороной является, например, грань 89, которая примыкает, кроме грани 89, к ребру 89, и, как вытекает из рис. 6, грань 39(10)(11) должна быть смежна с гранью 123. Докажем, что грань 123 смежна с гранью 123. Допустим, что это не так; тогда грань 123 смежна с гранью 123, например, по ребру 45. Тогда грань 65 должна примыкать к ребру 65, и тогда из рассмотрения звезды вершины 65 вытекает, что грань 65 примыкает к ребру 65, что, однако, невозможно, так как грань 65 не может примыкать к ребру 65.

Доказательства этого утверждения в остальных случаях приводятся аналогично приведенному выше и при желании могут быть приведены читателем.

См. также таблицу на стр. 296 II части книги Перепелкина под № 8.

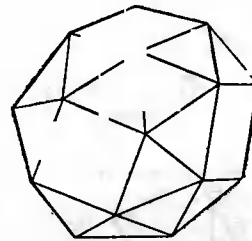


Рис. 5.

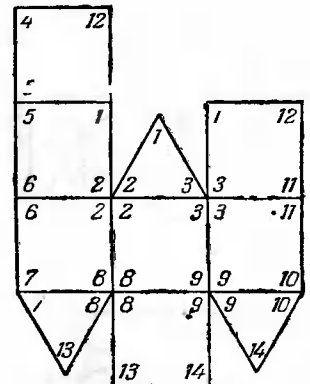


Рис. 6.

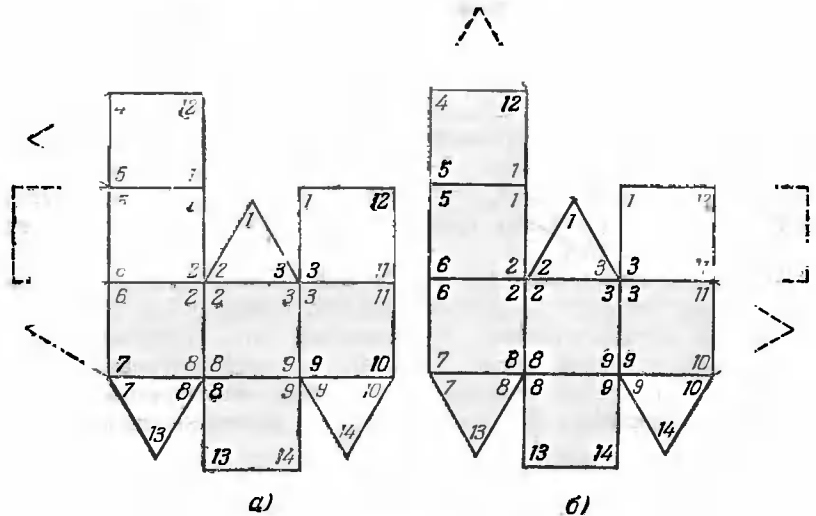


Рис. 7.

грани. К аналогичному противоречию приводит предположение, что грань  $154(12)$  смежна с треугольной гранью по ребру  $4(12)$  (рис. 7,б).

Таким образом, рассматриваемый многогранник имеет четырехугольные грани, не смежные ни с одной треугольной гранью. Возьмем одну из таких граней; к каждой из ее вершин примыкают по две четырех-

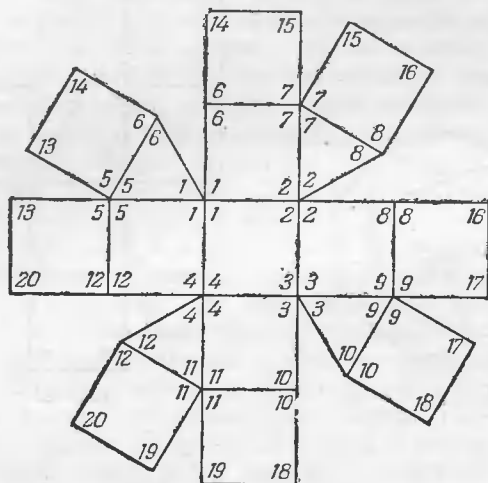


Рис. 8.

угольные и по одной треугольной грани, как это изображено на рис. 8. Далее, к каждой из вершин 5—12, кроме граней, принадлежащих звездам вершин 1, 2, 3 и 4, примыкает еще по одной четырехугольной грани; достроив все эти грани, мы придем к конфигурации, изображенной на рис. 8.

Рассмотрим теперь вершину 13. К ней должны примыкать, кроме изображенных на рис. 8, еще две смежные между собой грани: треугольная и четырехугольная. Предположив, что треугольная грань имеет своей стороной ребро  $(13)(14)$ , а четырехугольная — ребро  $(13)(20)$ , мы легко заключим (и притом единственным с точностью до изоморфизма образом) построение развертки многогранника (рис. 9,а).

Предположив же, что треугольная грань, примыкающая к вершине 13, имеет своей стороной ребро  $(13)(20)$ , а четырехугольная — ребро  $(13)(14)$ , мы получим (также единственным с точностью до изоморфизма образом) развертку другого многогранника (рис. 9,б), очевидно, *не изоморфного первому*.

Таким образом, существует два (и только два) различных типа неизоморфных между собой топологических полуправильных многогранников, имеющих в каждой вершине одну треугольную и три четы-

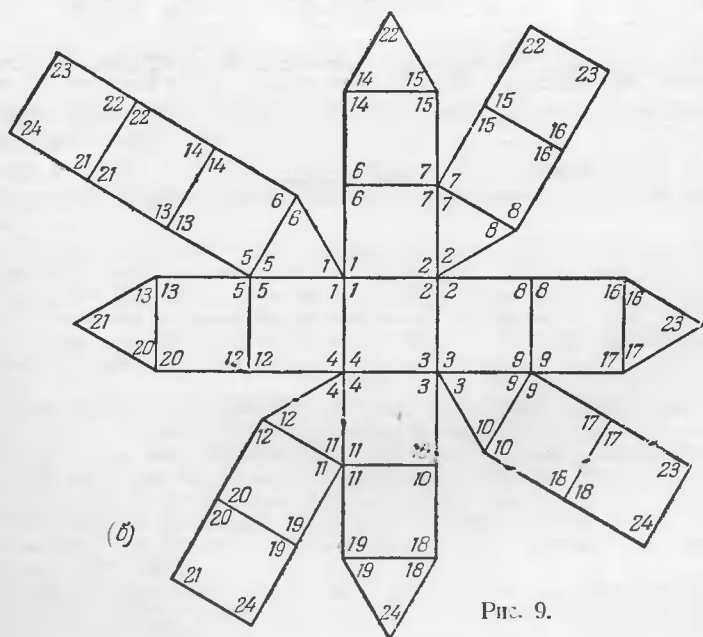
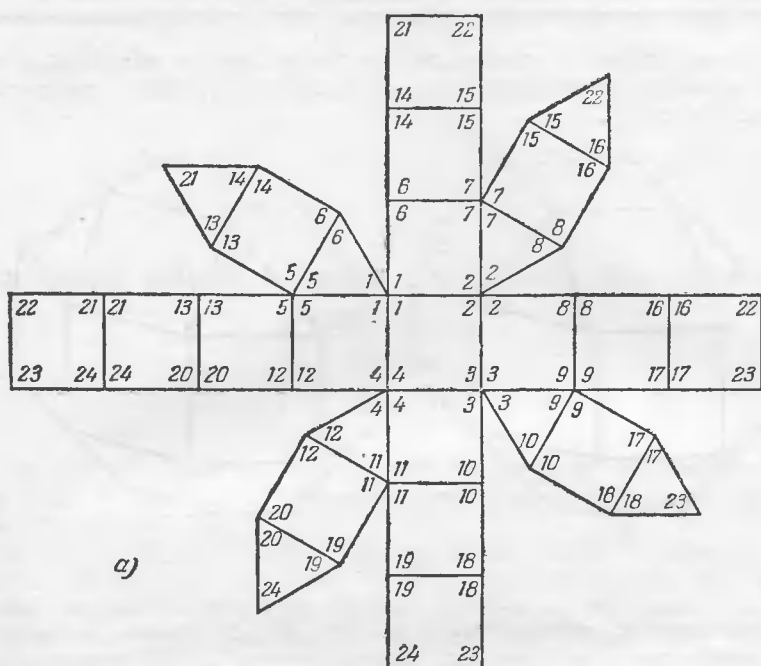


Рис. 9.

рехугольные грани, а потому два (и только два) не подобных между собой архимедовых многогранника. Эти два многогранника изображены на рис. 10, а и б.

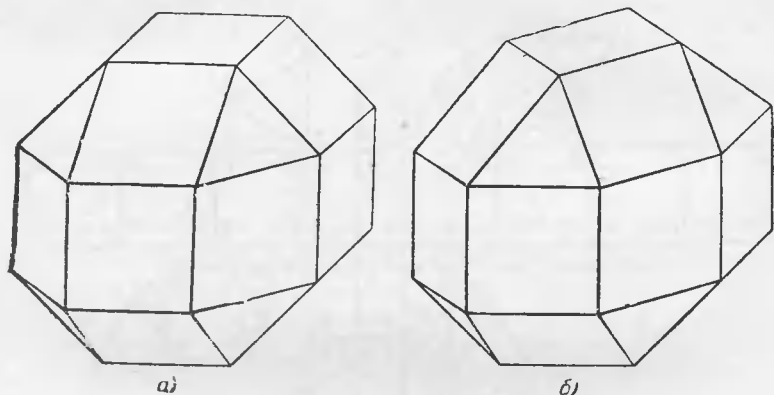


Рис. 10.

Многогранник, изображенный на рис. 10, а, обычно указывается при перечислении архимедовых многогранников<sup>1)</sup>. Многогранник же изображенный на 10, б, указывается, по-видимому, впервые.

<sup>1)</sup> См., например, статью «Многогранники» в Большой Советской Энциклопедии, т. 27, стр. 652.

## ТЕОРЕМЫ ЧЕВЫ И МЕНЕЛАЯ В $n$ -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н. М. Бескин

(Москва)

Введение

Эта статья посвящена обобщению на  $n$ -мерное пространство теорем Чевы и Менелая из геометрии треугольника. Напомним содержание этих теорем.

Пусть  $L$ ,  $M$  и  $N$  — точки, взятые соответственно на сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  (стороны рассматриваются как бесконечные прямые). Обозначим буквами  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$  отношения (положительные или отрицательные), в которых эти точки делят стороны треугольника:

$$\frac{BL}{LC} = \lambda, \quad \frac{CM}{MA} = \mu, \quad \frac{AN}{NB} = \nu.$$

**Теорема Чевы<sup>1)</sup>.** Для того, чтобы прямые  $AL$ ,  $BM$  и  $CN$  проходили через одну точку (или были параллельны), необходимо и достаточно условие  $\lambda\mu\nu = 1$ .

**Теорема Менелая<sup>2)</sup>.** Для того, чтобы точки  $L$ ,  $M$  и  $N$  лежали на одной прямой, необходимо и достаточно условие  $\lambda\mu\nu = -1$ <sup>3)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Джованни Чева (1648—1734) — итальянский математик. Родился в Милане, большую часть жизни провел в Мантуе. Интересующая нас теорема опубликована в работе «De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio» (1678). В этой работе Чева систематически использует метод, оказавшийся плодотворным: в разные точки фигуры помещаются массы, находится различными способами центр тяжести этой системы точек и полученные результаты отождествляются.

В упомянутой работе содержится также следующее обобщение теоремы Менелая: если стороны пространственного четырехугольника пересечены плоскостью, то на них образуется восемь отрезков таких, что произведение четырех, не имеющих общих концов, равно произведению четырех других.

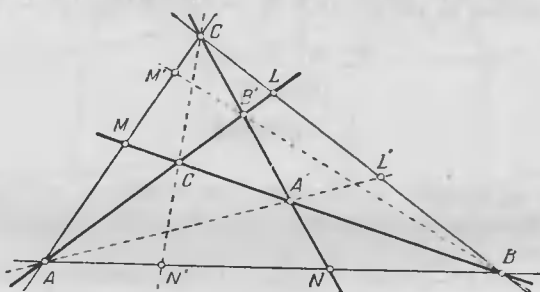
<sup>2)</sup> Менелай — греческий геометр, автор трактата «Сферика» (около 80 г. н. э.), в котором установил ряд свойств сферических треугольников. В этом трактате в качестве леммы содержится рассматриваемая здесь теорема (разумеется, не в такой формулировке).

<sup>3)</sup> Доказательства этой теоремы и теоремы Чевы см., например, в книге: Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. I (Планиметрия), изд. 3-е, 1948, стр. 182—183, 187—188.



Условия  $\lambda\mu\nu=1$  или  $\lambda\mu\nu=-1$  имеют проективно-инвариантный характер, потому что произведение  $\lambda\mu\nu$  является проективным инвариантом. Это вытекает из следующей важной теоремы, доказанной впервые (?) Н. А. Извольским<sup>1)</sup> и оставшейся мало замеченной. Формулировка, которую мы приводим, имеет одно незначительное отличие от формулировки Н. А. Извольского.

Теорема Н. А. Извольского.  $\lambda\mu\nu=(BCLL')=(CAML')=(ABNN')$ . (Обозначения точек см. на рисунке. Символ  $(BCLL')$  обозначает сложное отношение.)



Проективная инвариантность произведения отношений, в которых точки  $L, M, N$  делят стороны треугольника, обобщается и на случай любого плоского многоугольника<sup>2)</sup>.

В настоящей статье дается обобщение теорем Чевы и Менелая на  $n$ -мерное пространство. Этим вопросом занимались многие авторы. Для  $n=3$  результаты, почти в точности аналогичные нашим, имеются у П. Кудерк и А. Балличчони<sup>3)</sup>. Н. А. Колмогоров дает условия, аналогичные  $\lambda\mu\nu=1$  и  $\lambda\mu\nu=-1$ . В трехмерном случае он вводит для этого понятие о синусе трехгранного угла<sup>4)</sup>. В своей более поздней работе<sup>5)</sup> он рассматривает сложное отношение  $n+3$  точек  $n$ -мерного пространства, определяя его как отношение некоторых  $n$ -мерных объемов, и при помощи этого понятия формулирует аналог теорем Чевы и Менелая для  $n=4$ . Некоторые авторы (К. К. Мокрищев,

<sup>1)</sup> Н. А. Извольский, По поводу теоремы Чевы, «Математическое образование», 1929, № 2—3, стр. 45—47.

<sup>2)</sup> См. И. М. Яглом, Геометрические преобразования, II, М., 1956, стр. 389.

<sup>3)</sup> P. Couderc et A. Balliccioni, Premier livre du tétraèdre, Paris, 1935, стр. 81 и 82. Разница заключается в том, что авторы доказывают прохождение через одну точку прямых типа  $A_{01}A_{23}$ ,  $A_{02}A_{13}$ , ..., не замечая, что через эту же точку проходят прямые типа  $A_{06}A_{123}$ ,  $A_1A_{023}$ , ... (обозначения см. ниже).

<sup>4)</sup> Н. А. Колмогоров, Тетраэдрометрия, «Математическое образование», № 2—3, 1929, стр. 90—98.

<sup>5)</sup> Н. А. Колмогоров, Аналогии двойных или ангармонических отношений для пространства трех и более измерений и их применение к доказательству некоторых теорем. «Уч. зап. Кировского гос. пед. ин-та», № 7, 1953, стр. 3—14.

3. Наденник) обобщают теоремы Чевы и Менелая на  $n$ -мерный многоугольник<sup>1)</sup>.

В настоящей работе не используется никакого аналога условий  $\lambda\mu=\pm 1$ , и в формулировках употребляются только проективные понятия. Теоремы Чевы и Менелая формулируются не для многоугольника, а для симплекса.

Действие происходит в  $n$ -мерном проективном пространстве  $S_n$ . Напомним, что в проективном пространстве две точки разбивают прямую на два равноправных отрезка. Порядок или направление на прямой может быть указано упорядоченной тройкой точек. Если прямая  $a$  не лежит в гиперплоскости  $S_{n-1}$ , то обязательно пересекает ее в одной точке (в аффинном пространстве выделяется еще случай параллельности).

*Симплексом* называется множество  $n+1$  точек общего положения (при  $n=2$  — треугольник, при  $n=3$  — тетраэдр и т. д.), т. е. не принадлежащих одному  $S_{n-1}$ . Задание этих точек определяет ребра, двумерные грани и т. д. Подчеркнем, что симплекс — это просто множество  $n+1$  точек, а не внутренняя область. Понятие внутренней области вообще не имеет смысла в проективной геометрии. Ребра симплекса — не отрезки, а целые прямые, двумерные грани — целые плоскости и т. д.

### § 1. Теорема Чевы в $n$ -мерном пространстве<sup>2)</sup>

В проективном пространстве  $n$  измерений  $S_n$  рассмотрим симплекс  $\Sigma \equiv A_0A_1A_2 \dots A_n$ , образованный  $n+1$  точками  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  общего положения, т. е. не принадлежащими одному  $S_{n-1}$ .

Пусть на каждом ребре  $A_iA_j$  симплекса  $\Sigma$  (ребром считается вся прямая  $A_iA_j$ ) взята какая-нибудь точка  $A_{ij}$ , не совпадающая ни с одной из вершин  $A_i$  и  $A_j$ . Симплекс  $\Sigma$ , дополненный точками  $A_{ij}$ , мы будем называть *дополненным симплексом* и обозначать его  $\bar{\Sigma}$ . Точки  $A_{ij}$  мы будем называть *дополнительными точками*, а вершинами, ребрами и т. д. симплекса  $\bar{\Sigma}$  мы будем называть вершинами, ребра и т. д. симплекса  $\Sigma$ .

Рассмотрим все сочетания по три вершин дополненного симплекса  $\bar{\Sigma}$ , т. е. все плоские грани симплекса  $\bar{\Sigma}$ . В каждом треугольнике  $A_iA_jA_k$  проведем прямые  $A_iA_{jk}$ ,  $A_jA_{ki}$  и  $A_kA_{ij}$ . Если эти прямые пройдут через одну точку, то мы скажем, что в треугольнике  $A_iA_jA_k$  про-

<sup>1)</sup> К. К. Мокрищев, Об одном обобщении теоремы Менелая, Ростовский гос. университет им. В. М. Молотова. Сборник уч. зап. НИИ математики и механики, т. II, Ростов н/Д, 1938, стр. 38—39; Об одном пространственном аналоге теоремы Чевы и ей обратной, там же, стр. 51; Z. Nádeník, Rozšíření věty Menelaovy a Cevovy na  $n$ -dimensionální útvary, «Časopis pro pěstování matematiky», 81, 1956, č. 1. (З. Наденник, Распространение теорем Менелая и Чевы на  $n$ -мерные фигуры (по-чешски)).

<sup>2)</sup> §§ 1 и 2 представляют содержание доклада, прочитанного на III Всесоюзном съезде математиков (заседание секции геометрии 3 июля 1956 г.).

изошло явление Чевы, а упомянутую точку обозначим  $A_{ijk}$  и будем называть ее *точкой Чевы* треугольника  $A_i A_j A_k$ .

Если явление Чевы произойдет во всех треугольниках, служащих плоскими гранями дополненного симплекса  $\bar{\Sigma}$ , то продолжим наш процесс следующим образом. Рассмотрим все сочетания по четыре вершины дополненного симплекса  $\bar{\Sigma}$ , т. е. все тетраэдры, являющиеся трехмерными гранями дополненного симплекса  $\bar{\Sigma}$ . В каждом тетраэдре  $A_i A_j A_k A_l$  проведем следующие прямые:

- 1) прямые типа  $[1, 3]: A_i A_{jkl}, A_j A_{kli}, A_k A_{lij}, A_l A_{ijk}$ ;
- 2) » »  $[2, 2]: A_{ij} A_{kl}, A_{ik} A_{jl}, A_{il} A_{jk}$ .

Если все эти семь прямых пройдут через одну точку, то мы скажем, что в тетраэдре  $A_i A_j A_k A_l$  произошло явление Чевы, а упомянутую точку обозначим  $A_{ijkl}$  и будем называть ее *точкой Чевы* тетраэдра  $A_i A_j A_k A_l$ .

Если явление Чевы произойдет во всех тетраэдрах, служащих трехмерными гранями дополненного симплекса  $\bar{\Sigma}$ , то продолжим этот процесс дальше, рассматривая сочетания по пять вершин дополненного симплекса  $\bar{\Sigma}$  и т. д.

Описанный процесс мы будем называть *процессом Чевы*, а получающуюся таким образом последовательность групп точек с одним, двумя, тремя и т. д. индексами — *цепью Чевы*. Условимся еще в следующих терминах:

точки с одним индексом (вершины симплекса) образуют *первое звено* цепи Чевы;

точки с двумя индексами (дополнительные точки) образуют *второе звено* цепи Чевы;

точки с тремя индексами образуют *третье звено* цепи Чевы и т. д.

Поясним подробнее процесс Чевы. Пусть  $A_0 A_1 \dots A_k$  есть симплекс, являющийся  $k$ -мерной гранью дополненного симплекса  $\bar{\Sigma}$ . Мы предполагаем, что во всех гранях дополненного симплекса  $\bar{\Sigma}$ , число измерений которых меньше чем  $k$ , явление Чевы произошло. Разложим число  $k+1$  на два натуральных слагаемых

$$k+1 = p+q.$$

Рассмотрим симплекс  $A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p}$  и дополнительный к нему (относительно  $A_0 A_1 \dots A_k$ ) симплекс  $A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_q}$ . Здесь  $i_1, i_2, \dots, i_p$  — какое-нибудь сочетание  $p$  индексов из  $0, 1, 2, \dots, k+1$ , а  $j_1, j_2, \dots, j_q$  — сочетание из остальных индексов. Проведем прямую, соединяющую точку Чевы симплекса  $A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p}$  с точкой Чевы симплекса  $A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_q}$ ; будем называть ее *прямой типа*  $[p, q]$ . Если все прямые всех типов  $[p, q]$ , соответствующих всем возможным разложениям числа  $k+1$  на два натуральных слагаемых, проходят через одну точку, то мы будем считать, что явление Чевы

в симплексе  $A_0 A_1 \dots A_k$  произошло. Если явление Чевы произойдет во всех  $k$ -мерных симплексах, входящих в  $\bar{\Sigma}$ , то мы переходим к  $(k+1)$ -мерным симплексам. Если же в каком-нибудь симплексе явление Чевы не произойдет, то мы считаем процесс Чевы оборвавшимся.

**Теорема 1 (теорема Чевы)<sup>1)</sup>.** *Процесс Чевы может оборваться только в треугольниках.*

Итак, если во всех плоских гранях дополненного симплекса  $\bar{\Sigma}$  явление Чевы произойдет, то дальше процесс Чевы пойдет беспрерывно и приведет в конце концов к одной точке  $A_{012\dots n}$ , образующей последнее звено цепи Чевы.

**Доказательство.** Прежде всего отметим следующее формальное правило: если в некотором  $k$ -мерном симплексе произошло явление Чевы, то точки  $A_{i_1 i_2 \dots i_\lambda}$ ,  $A_{j_1 j_2 \dots j_\mu}$  и  $A_{i_1 i_2 \dots i_\lambda j_1 j_2 \dots j_\mu}$  (среди индексов  $i_1, i_2, \dots, i_\lambda; j_1, j_2, \dots, j_\mu$  нет одинаковых;  $\lambda + \mu \leq k+1$ ) лежат на одной прямой.

Предположим, что явление Чевы произошло во всех симплексах 2, 3, ...,  $k$  измерений, входящих в состав дополненного симплекса  $\bar{\Sigma}$ , и докажем, что в таком случае оно произойдет и в любом  $(k+1)$ -мерном симплексе. Рассмотрим для определенности симплекс  $\Sigma' \equiv A_0 A_1 \dots A_{k+1}$ .

Рассмотрим вершину  $A_0$  и дополнительный к ней в  $\Sigma'$  симплекс  $A_1 A_2 \dots A_{k+1}$ . В этом дополнительном симплексе согласно предположению существует точка Чевы  $A_{12 \dots (k+1)}$ . Построим плоскости

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0^0 &\equiv A_0 A_1 A_{12 \dots (k+1)}, \\ \alpha_2^0 &\equiv A_0 A_2 A_{12 \dots (k+1)}, \\ &\vdots \\ \alpha_{k+1}^0 &\equiv A_0 A_{k+1} A_{12 \dots (k+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Плоскости (1) образуют пучок с осью  $A_0 A_{12 \dots (k+1)}$ . Построим еще аналогичный пучок, исходя из вершины  $A_1$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0^1 &\equiv A_1 A_0 A_{12 \dots (k+1)}, \\ \alpha_2^1 &\equiv A_1 A_2 A_{12 \dots (k+1)}, \\ &\vdots \\ \alpha_{k+1}^1 &\equiv A_1 A_{k+1} A_{12 \dots (k+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Плоскости  $\alpha_1^0$  и  $\alpha_0^1$  совпадают. В самом деле, плоскость  $\alpha_1^0$  содержит прямую  $A_1 A_{12 \dots (k+1)}$ ; на этой прямой лежит точка  $A_{23 \dots (k+1)}$ . Плоскость  $\alpha_0^1$  содержит прямую  $A_0 A_{02 \dots (k+1)}$ ; на этой прямой лежит точка  $A_{23 \dots (k+1)}$ . Таким образом, плоскости  $\alpha_1^0$  и  $\alpha_0^1$  содержат три общие некомпланарные точки:  $A_0$ ,  $A_1$  и  $A_{23 \dots (k+1)}$ .

Итак, пучки (1) и (2) содержат общую плоскость. Следовательно, их оси, т. е. прямые  $A_0 A_{12 \dots (k+1)}$  и  $A_1 A_{02 \dots (k+1)}$ , пересекаются.

<sup>1)</sup> Нам удобнее переставить «прямую» и «обратную» теоремы.

Повторяя это рассуждение, мы докажем, что любые две прямые типа  $[1, k+1]$  в симплексе  $\Sigma'$  пересекаются. Докажем теперь, что все эти прямые проходят через одну точку. Возьмем какие-нибудь три из этих прямых, например  $A_0 A_{123 \dots (k+1)}$ ,  $A_1 A_{023 \dots (k+1)}$  и  $A_2 A_{013 \dots (k+1)}$ . Любые две из них пересекаются; следовательно, эти прямые либо образуют треугольник, либо проходят через одну точку. Первое предположение отпадает по следующей причине: плоскость этого треугольника являлась бы гранью  $A_0 A_1 A_2$  симплекса, а в этой грани не могут лежать точки  $A_{123 \dots (k+1)}$  и  $A_{023 \dots (k+1)}$ , в обозначении которых встречаются другие индексы кроме 0, 1 и 2. Следовательно, прямые  $A_0 A_{123 \dots (k+1)}$ ,  $A_1 A_{023 \dots (k+1)}$  и  $A_2 A_{013 \dots (k+1)}$  проходят через одну точку. Присоединяя поочередно остальные прямые типа  $[1, k+1]$ , докажем, что все они проходят через эту же точку. Назовем ее  $A_{012 \dots (k+1)}$ .

Остается доказать, что не только прямые типа  $[1, k+1]$ , но и прямые всех типов  $[i, k-i+2]$   $\left[ i=1, 2, \dots, E\left(\frac{k+2}{2}\right) \right]$  проходят через ту же точку. Чтобы избежать громоздких обозначений, рассмотрим, например, шестимерный симплекс  $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ ; общность рассуждения будет очевидна. Возьмем в нем, например, прямую типа  $[3, 4]$   $A_{012} A_{3456}$  и докажем, что она проходит через точку  $A_{0123456}$ .

Рассмотрим пучок

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &\equiv A_0 A_{12} A_{3456}, \\ \beta_1 &\equiv A_1 A_{02} A_{3456}, \\ \beta_2 &\equiv A_2 A_{01} A_{3456} \end{aligned} \right\}$$

и докажем, что любая плоскость этого пучка содержит интересные нас три точки. Например, плоскость  $\beta_0$  содержит точки  $A_0$  и  $A_{12}$ , а следовательно, и точку  $A_{012}$  (явление Чевы в треугольнике  $A_0 A_1 A_2$ ). Далее, плоскость  $\beta_0$  содержит точки  $A_{12}$  и  $A_{3456}$ , а следовательно, и точку  $A_{123456}$  (явление Чевы в пятимерном симплексе  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ ).

Наконец,  $\beta_0$ , содержа точки  $A_0$  и  $A_{123456}$ , содержит и точку  $A_{0123456}$  (явление Чевы для прямых типа  $[1, 6]$  в рассматриваемом шестимерном симплексе). Итак, плоскость  $\beta_0$  содержит точки  $A_{012}$ ,  $A_{3456}$  и  $A_{0123456}$ . Аналогично доказывается, что каждая из плоскостей  $\beta_1$  и  $\beta_2$  содержит эти точки. Никакие две из упомянутых плоскостей не могут совпадать. В самом деле, точки  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_{12}$  и  $A_{02}$  определяют грань  $A_0 A_1 A_2$ , а в этой грани не может лежать точка  $A_{3456}$ . Таким образом доказано, что точки  $A_{012}$ ,  $A_{3456}$  и  $A_{0123456}$  лежат на одной прямой.

Теорема Чевы доказана.

**Теорема II (обратная теореме Чевы).** Если дан симплекс  $\Sigma \equiv A_0 A_1 \dots A_n$  и точка  $M$ , не принадлежащая границе этого симплекса, то этим однозначно определяется цепь Чевы, в которой точки  $A_0, A_1, \dots, A_n$  образуют первое звено, а точка  $M$  — последнее. Другими словами, задание точки  $M$ , не принадлежащей границе симплекса  $\Sigma \equiv A_0 A_1 \dots A_n$ , однозначно индуцирует на ребрах  $A_i A_j$

симплекса  $\Sigma$  точки  $A_{ij}$ , такие, что процесс Чевы в дополненном симплексе  $\bar{\Sigma}$  приводит к точке  $A_{012 \dots n}$ , совпадающей с  $M$ .

Таким образом, нам предстоит доказать, что процесс Чевы может быть проведен в обратном направлении, причем цепь Чевы определяется однозначно, несмотря на возможные разветвления при проведении процесса в обратном направлении.

Доказательство. Рассмотрим точку пересечения прямой  $A_0M$  с  $(n-1)$ -мерным пространством  $A_1A_2 \dots A_n$ ; обозначим ее  $A_{12 \dots n}$ :

$$A_0M \times A_1A_2 \dots A_n \equiv A_{12 \dots n}.$$

Аналогично

$$A_1M \times A_0A_2 \dots A_n \equiv A_{02 \dots n}.$$

Следующий шаг (к каждой точке с  $n-1$  индексами) может быть сделан двумя путями:

$$A_0A_{023 \dots n} \times A_2A_3 \dots A_n \equiv A'_{23 \dots n},$$

$$A_1A_{123 \dots n} \times A_2A_3 \dots A_n \equiv A''_{23 \dots n},$$

но совершенно очевидно, что  $A'_{23 \dots n} \equiv A''_{23 \dots n}$ . В самом деле, это — точка пересечения плоскости  $A_0A_1M$  с  $(n-2)$ -мерным пространством  $A_2A_3 \dots A_n$ . Это рассуждение аналогично продолжается и дальше.

## § 2. Теорема Менелая в $n$ -мерном пространстве

Если в дополненном симплексе  $\bar{\Sigma}$  все точки  $A_{ij}$  окажутся принадлежащими пространству  $(n-1)$ -го измерения, то мы будем говорить, что в этом симплексе произошло явление Менелая.

Теорема III (теорема Менелая). Если явление Менелая произойдет во всех треугольниках  $A_iA_jA_k$ , являющихся плоскими гранями дополненного симплекса  $\bar{\Sigma}$ , то оно произойдет и в  $\bar{\Sigma}$ .

Теорема IV (обратная теорема Менелая). Если явление Менелая произойдет в дополненном симплексе  $\bar{\Sigma}$ , то оно произойдет и во всех треугольниках, являющихся плоскими гранями  $\bar{\Sigma}$ .

Значит, для того чтобы все взятые на ребрах дополнительные точки  $A_{ij}$  оказались в одном  $S_{n-1}$ , необходимо и достаточно, чтобы каждая тройка этих точек, принадлежащая одной плоской грани (т. е. каждая тройка  $A_{ij}$ ,  $A_{jk}$  и  $A_{ki}$ ), лежала на прямой. Разумеется, при этом явление Менелая будет происходить и во всех  $k$ -мерных гранях симплекса  $\bar{\Sigma}$  ( $k=2, 3, \dots, n$ ).

Доказательство. Условимся каждой точке  $A_{ij}$  ставить в соответствие гармоническую (относительно  $A_i$  и  $A_j$ ) точку  $A'_{ij}$ :

$$A_iA_j \dot{\sim} A_{ij}A'_{ij}.$$

В таком случае каждому дополненному симплексу  $\bar{\Sigma}$  ставится в соответствие сопряженный дополненный симплекс  $\bar{\Sigma}'$ ;  $\bar{\Sigma}'$  имеет те же вершины,

что и  $\bar{\Sigma}$ , но дополнительные точки  $A_{ij}$  заменены на  $A'_{ij}$ . Связь между дополненными симплексами  $\bar{\Sigma}$  и  $\bar{\Sigma}'$  взаимная.

Теоремы III и IV вытекают из теорем I и II на основании следующего замечания: если в одном из двух сопряженных дополненных симплексов имеет место явление Чевы, то в другом имеет место явление Менелая.

Для доказательства этого замечания рассмотрим сначала один частный случай. Пусть каждая точка  $A_{ij}$  является серединой отрезка  $A_i A_j$ . Тогда каждая точка  $A'_{ij}$  является несобственной точкой ребра  $A_i A_j$ . В каждом треугольнике  $A_i A_j A_k$  с дополнительными точками  $A_{ij}$ ,  $A_{jk}$ ,  $A_{ki}$  явление Чевы имеет место, потому что прямые  $A_i A_{jk}$  суть медианы; следовательно, оно имеет место и в дополненном симплексе  $\bar{\Sigma}$  (теорема I). Явление же Менелая в дополненном симплексе  $\bar{\Sigma}'$  тоже имеет место, потому что все точки  $A'_{ij}$  принадлежат несобственному  $S_{n-1}$ .

Перейдем теперь к общему случаю. Возьмем в  $S_n$  проективное преобразование, при котором точки  $A_0, A_1, \dots, A_n$  являются двойными, а точка Чевы  $A_{01\dots n}$  переходит в точку  $E$ , которая являлась бы точкой Чевы, если бы симплекс  $\Sigma$  был дополнен серединами отрезков  $A_i A_j$ . Такое проективное преобразование существует; оно невырожденное и определяется однозначно, потому что любые  $n+1$  точек из  $A_0, A_1, \dots, A_n, A_{01\dots n}$ , а также из  $A_0, A_1, \dots, A_n, E$  — общего положения. Поскольку наличие явления Чевы или явления Менелая не нарушается при проективном преобразовании, сделанное выше замечание переносится на общий случай.

Докажем теперь теорему III. Пусть в дополненном симплексе  $\bar{\Sigma}$  в каждой плоской грани налицо явление Менелая. В таком случае в сопряженном дополненном симплексе  $\bar{\Sigma}'$  в каждой плоской грани имеет место явление Чевы. Тогда по теореме I явление Чевы имеет место в дополненном симплексе  $\bar{\Sigma}'$ , а следовательно, в дополненном симплексе  $\bar{\Sigma}$  имеет место явление Менелая, ч. т. д.

Аналогично доказывается и теорема IV.

### § 3. Применение барицентрических координат

Положение каждой дополнительной точки  $A_{ij}$  на своем ребре  $A_i A_j$  определяется отношением, в котором эта точка делит отрезок  $A_i A_j$ . Введем обозначения

$$\lambda_{ij} = \frac{A_i A_{ij}}{A_{ij} A_j} \quad \left( \lambda_{ji} = \frac{1}{\lambda_{ij}} \right). \quad (3)$$

Припишем каждой вершине  $A_i$  массу  $m_i$  (она может быть положительной или отрицательной, но отличной от нуля). Тогда для каждой пары вершин  $A_i$  и  $A_j$  определится центр тяжести, лежащий на ребре  $A_i A_j$ .

Положим теперь, что дополнительные точки  $A_{ij}$  заданы, т. е. заданы числа (3), и требуется определить массы  $m_i$  так, чтобы центры тяжести всех пар вершин находились в заданных точках  $A_{ij}$ . Для этого надо решить систему уравнений

$$\frac{m_i}{m_j} = \lambda_{ji} \quad (i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n), \quad (4)$$

где  $m_i$  — неизвестные.

Разумеется, для того чтобы эта система была непротиворечивой, должны соблюдаться условия

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{ij} \lambda_{jk} \lambda_{ki} &= 1 \\ (i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots, n, \\ i \neq j; j \neq k; k \neq i). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

При  $n=2$  формулы (5) дают одно условие, которое и является условием в обычной теореме Чевы: *если  $\lambda_{01} \lambda_{12} \lambda_{20} = 1$ , то прямые  $A_0 A_{12}$ ,  $A_1 A_{20}$  и  $A_2 A_{01}$  проходят через одну точку.*

В теореме I этой работы наличие явления Чевы в каждом треугольнике является условием. Можно было бы сделать еще шаг назад в этой логической цепи и сказать: при соблюдении условий (5) в дополненном симплексе  $\bar{\Sigma}$  имеет место явление Чевы.

Покажем теперь, что система (4) при условиях (5) разрешима. Для этого рассмотрим все ребра  $\bar{\Sigma}$ , проходящие через одну вершину, например через  $A_0$ . Массу  $m_0$  выберем произвольно. Из уравнений (4), полагая  $j=0$ , определим массы во всех остальных вершинах

$$m_i = \lambda_{i0} m_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Теперь возьмем какое-нибудь ребро  $A_i A_j$ , не проходящее через  $A_0$ . Массы в точках  $A_i$  и  $A_j$  уже выбраны, и центр тяжести точек  $A_i$  и  $A_j$  определен. Надо показать, что его положение согласуется с соответственным уравнением (4).

Имеем:

$$\frac{m_i}{m_j} = \frac{\lambda_{0i}}{\lambda_{0j}} = \frac{1}{\lambda_{ji}} = \lambda_{ji}, \quad \text{ч. т. д.}$$

Теорема Чевы вытекает из того, что центр тяжести двух материальных точек лежит на прямой, соединяющей эти точки. Все материальные точки  $A_i$  можно любым образом разбить на две группы и найти центр тяжести каждой группы. Прямая, соединяющая эти два центра тяжести, проходит через общий центр тяжести всей системы.

Разумеется, это истолкование не проективное, так как основано на аффинном понятии центра тяжести.



## АКАД. А. Н. КОЛМОГОРОВ ОБ АКСИОМАТИКЕ

Приведя две точки зрения на длину, площадь и объем как на величины и как на числа, А. Н. Колмогоров пишет:

«Мне представляется единственно усачным выходом сопоставить те общие свойства длин, площадей и объемов, которые позволяют выразить их при выбранной единице меры числами, и называть «системой величин» всякую совокупность объектов, обладающую этими свойствами. Но это уже не что иное, как аксиоматический метод, который не должен казаться скомпрометированным своей связью с конвенционализмом (учением об условности математических определений). Действительно, когда Гильберт в «Основаниях геометрии» предлагает называть «пространством» любую совокупность объектов и отношений, удовлетворяющую его аксиомам, то вместе с Лебегом следует протестовать, если из определения Гильберта делают заключение о произвольности выбора объекта изучения в математике. Однако то же самое определение Гильберта можно воспринимать совсем противоположным образом. Можно утверждать, что система аксиом, лежащих в основе геометрии, является замечательным, концентрированным выражением результата наших усилий, направленных к познанию действительности. Успех, заключающийся в ее создании, тем более замечателен, что она не только отражает с очень большой точностью свойства окружающего нас пространства при обычной интерпретации ее основных понятий (точек, прямых и плоскостей и т. д.), но также хорошо приспособлена и для выражения совсем других закономерностей внешнего мира при других ее интерпретациях. Таким образом, абстрактная (аксиоматизированная) геометрия больше связана с действительностью, чем геометрия в ее традиционной форме».

(Из предисловия к книге Лебега «Об измерении величин» М., 1938, стр. 11—12)

## ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

А. Л. Бондарев

(Краснодар)

1. Обычные доказательства формулы Тейлора, дающей разложение функции  $f(x)$  по степенным функциям  $(x-a)^k$ , используют только некоторые свойства степенных функций, не являющиеся характеристическими для этих функций. Это побуждает к обобщению формулы Тейлора.

Пусть в области действительного переменного:

1° функции  $f(x)$  и  $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$  непрерывны при  $a \leq x \leq b$  и  $n$ -кратно дифференцируемы при  $a \leq x < b$ ;

2°  $u_{\kappa}^{(j)}(a) = 0$  при  $0 \leq j < k \leq n$ ;

3°  $u_{\kappa}^{(k)}(a) \neq 0$  при  $0 \leq k \leq n-1$ ;

4°  $u_n^{(n)}(x) \neq 0$  при  $a < x < b^1$ .

При таких условиях для каждого  $x$  из отрезка  $[a, b]$  имеет место формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_k(x) + R_n(x), \quad (1)$$

где

$$A_k = \frac{f^{(k)}(a) - \sum_{j=0}^{k-1} A_j u_j^{(k)}(a)}{u_{\kappa}^{(k)}(a)}$$

и

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c) - \sum_{j=0}^{n-1} A_j u_j^{(n)}(c)}{u_n^{(n)}(c)} u_n(x) \quad (a < c < b).$$

<sup>1)</sup> Читатель заметит, что условия 1° — 4° воспроизводят те свойства функций  $(x-a)^k$ , которые используются при обычном выводе формулы Тейлора, и сам этот вывод полностью копируется при доказательстве формулы (1).

Доказательство. Выберем числа  $A_k$  так, чтобы было

$$f^{(k)}(a) - \sum_{j=0}^k A_j u_j^{(k)}(a) = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (1)$$

Такой выбор чисел  $A_k$  осуществим, так как система (1), как полная треугольная система линейных уравнений, все диагональные элементы которой отличны от нуля, совместна. Из нее  $A_k$  определяются рекуррентно:

$$A_k = \frac{f^{(k)}(a) - \sum_{j=0}^{k-1} A_j u_j^{(k)}(a)}{u_k^{(k)}(a)}. \quad (2)$$

Располагая выбранными значениями  $A_k$ , положим еще

$$A_n = \frac{f(b) - \sum_{j=0}^{n-1} A_j u_j(b)}{u_n(b)}. \quad (3)$$

Сделать это можно, так как  $u_n(b) \neq 0$ . Действительно, если бы было  $u_n(b) = 0$ , то было бы  $u_n(a) = u_n(b) = 0$  и по теореме Ролля было бы  $u'_n(x_1) = 0$  при  $a < x_1 < b$ . Но тогда было бы  $u'_n(a) = u'_n(x_1) = 0$  и опять по теореме Ролля было бы  $u''_n(x_2) = 0$  при  $a < x_2 < x_1 < b$  и т. д., пока не получилось бы  $u^{(n)}_n(x_n) = 0$  при  $a < x_n < b$ . А такое невозможно по 4°.

Составим теперь функцию

$$F(x) = f(x) - \sum_{j=0}^n A_j u_j(x). \quad (4)$$

На основании условия 1° функция  $F(x)$  непрерывна при  $a \leq x \leq b$ , а при  $a \leq x < b$  имеет производную

$$F^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \sum_{j=0}^n A_j u_j^{(k)}(x). \quad (5)$$

Из (4) и (5), используя 2°, (1) и (3), находим:

$$F(a) = F(b) = F^{(k)}(a) = 0. \quad (6)$$

После этого видно, что функция  $F(x)$  на отрезке  $[a, b]$  удовлетворяет теореме Ролля. Поэтому существует такая точка  $c_1 \in (a, b)$ , что  $F'(c_1) = 0$ . Теперь уже  $F'(a) = F'(c_1) = 0$  и теорема Ролля применима к функции  $F'(x)$  на отрезке  $[a, c_1]$ . Значит, существует точка  $c_2 \in (a, c_1)$ , такая, что  $F''(c_2) = 0$ . Продолжая наметившуюся индукцию до номера  $n$ , найдем, что  $F^{(n)}(c) = 0$ , где  $c = c_n \in (a, c_{n-1}) \subset (a, b)$ .

Отсюда

$$f^{(n)}(c) - \sum_{j=0}^n A_j u_j^{(n)}(c) = 0,$$

или

$$A_n = \frac{f^{(n)}(c) - \sum_{j=0}^{n-1} A_j u_j^{(n)}(c)}{u_n^{(n)}(c)} \quad (a < c < b).$$

Подставляя это значение  $A_n$ , а также значения  $A_k$  из (1) или (2) в равенство (3), получим формулу (I) при  $x=b$ . Так как для других  $x \in [a, b]$  условия 1°–4° выполнены тем более, то формула (I) установлена тем самым и для этих  $x$ .

Заметим следующее.

Условия 2° и 3° использовались при доказательстве формулы (I) только как достаточные для совместности системы (1). Поэтому, если даже эти условия окажутся нарушенными, но система (1) будет совместной, то всё приведенное доказательство остается в силе, только вид  $A_k$  не будет уже определяться формулой (2). В частности, если при отдельных  $k$  случится, что

$$u_k^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - \sum_{j=0}^{k-1} A_j u_j^{(k)}(a) = 0,$$

то условие 3° нарушится, но система (1) не перестанет быть совместной. Значения  $A_k$  будут в этом случае неопределенными и любая система их может быть выбрана для формулы (I). Для устранения этой неопределенности в таких случаях естественно брать

$$A_k = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(a + \alpha) - \sum_{j=0}^{k-1} A_j u_j^{(k)}(a + \alpha)}{u_k^{(k)}(a + \alpha)},$$

если этот предел существует.

2. Обобщение формулы Тейлора можно получить и в комплексной области, копируя один из обычных выводов самой этой формулы. Но если формулу Тейлора считать уже выведенной, то обобщенную формулу можно получить проще. Мы изберем здесь второй путь.

Пусть выполняются условия:

1° функции  $f(z)$  и  $u_0(z), u_1(z), \dots, u_{n-1}(z)$  аналитические в круге  $|z - a| \leq R$  с контуром  $C$ ;

2°  $u_k^{(j)}(a) = 0$  при  $0 \leq j < k \leq n-1$ ;

3°  $u_k^{(k)}(a) \neq 0$  при  $0 \leq k \leq n-1$ .

Определим числа  $A_k$  как решения системы

$$f^{(k)}(a) - \sum_{j=0}^k A_j u_j^{(k)}(a) = 0,$$

т. е. возьмем

$$A_k = \frac{f^{(k)}(a) - \sum_{j=0}^{k-1} A_j u_j^{(k)}(a)}{u_k^{(k)}(a)}.$$

Составим теперь функцию

$$F(z) = f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} A_j u_j(z)$$

и применим к ней формулу Тейлора:

$$F(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_{n-1}(z-a)^{n-1} + R_n(z),$$

где

$$c_k = \frac{F^{(k)}(a)}{k!} \quad \text{и} \quad R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{z-a}{t-a} \right)^n \frac{F(t)}{t-z} dt.$$

Так как при  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$

$$F^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - \sum_{j=0}^{n-1} A_j u_j^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - \sum_{j=0}^k A_j u_j^{(k)}(a) = 0,$$

то  $c_k = 0$  и, значит,  $F(z) = R_n(z)$ .

Отсюда

$$f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} A_j u_j(z) = R_n(z),$$

или

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_k(z) + R_n(z), \quad (\text{II})$$

где

$$A_k = \frac{f^{(k)}(a) - \sum_{j=0}^{k-1} A_j u_j^{(k)}(a)}{u_k^{(k)}(a)}$$

и

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{z-a}{t-a} \right)^n \frac{f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} A_j u_j(t)}{t-z} dt^1).$$

<sup>1)</sup> Здесь  $u_n(z) = (z-a)^n$ , так что при втором пути вывода выбор  $u_n(z)$  более ограничен. Но это влияет только на форму остатка и не затрагивает основной части обобщенной формулы.

3. Относительно функций  $u_k(z)$ , по которым ведется разложение (II), справедливы

Теорема 1. Для того чтобы функция  $u_k(z)$  удовлетворяла условиям 1°—3°, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде

$$u_k(z) = (z-a)^k \varphi_k(z),$$

где  $\varphi_k(z)$  — функция, аналитическая в круге  $|z-a| \leq R$  и отличная от нуля в центре этого круга.

Необходимость. Пусть функция  $u_k(z)$  удовлетворяет условиям 1°—3°. Тогда в круге  $|z-a| \leq R$  ее можно представить рядом Тейлора:

$$u_k(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + a_j(z-a)^j + \dots$$

Так как  $a_j = \frac{1}{j!} u_k^{(j)}(a)$ , то по условию 2° при  $j < k$   $a_j = 0$ , а по условию 3°  $a_k \neq 0$ .

Получается:

$$\begin{aligned} u_k(z) &= a_k(z-a)^k + a_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots = \\ &= (z-a)^k [a_k + a_{k+1}(z-a) + a_{k+2}(z-a)^2 + \dots] = \\ &= (z-a)^k \varphi_k(z), \end{aligned}$$

где, как и требовалось, функция  $\varphi_k(z)$  — аналитическая в круге  $|z-a| \leq R$  и  $\varphi_k(a) \neq 0$ .

Достаточность. Пусть  $u_k(z) = (z-a)^k \varphi_k(z)$ , где  $\varphi_k(z)$  — аналитическая в круге  $|z-a| \leq R$  и  $\varphi_k(a) \neq 0$ .

Представим функцию  $\varphi_k(z)$  рядом Тейлора. Тогда

$$\begin{aligned} u_k(z) &= (z-a)^k [b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots] = \\ &= b_0(z-a)^k + b_1(z-a)^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует требуемое:

1°  $u_k(z)$  — функция, аналитическая в круге  $|z-a| \leq R$ ;

2°  $u_k^{(j)}(a) = 0$  при  $0 \leq j < k$ ;

3°  $u_k^{(k)}(a) = k! b_0 = k! \varphi_k(a) \neq 0$ .

После теоремы 1 вид коэффициентов формулы (II) можно привести в соответствие с полученным видом функций  $u_k(z)$ .

Сохраняя обозначения, принятые при доказательстве теоремы 1, находим, что при  $j \geq k$

$$\begin{aligned} u_k^{(j)}(a) &= j! a_j = j! b_{j-k} = \frac{j!}{(j-k)!} \varphi_k^{(j-k)}(a) = \\ &= j(j-1)\dots(j-k+1) \varphi_k^{(j-k)}(a). \end{aligned}$$

Значит, при  $j \leq k$

$$u_k^{(j)}(a) = k(k-1)\dots(k-j+1) \varphi_k^{(k-j)}(a).$$

Тогда

$$A_k = \frac{f^{(k)}(a) - \sum_{j=0}^{k-1} A_j k(k-1)\dots(k-j+1) \varphi_j^{(k-j)}(a)}{k! \varphi_k(a)}. \quad (III)$$

4. Для дальнейшего условимся называть: функцию  $u_k(z) = (z-a)^k \varphi_k(z)$ , если  $\varphi_k(z)$  — аналитическая в круге  $|z-a| \leq R$  и  $\varphi_k(a) \neq 0$ , *обобщенной степенью с показателем  $k$* ; функцию

$Q_n(z) = \sum_{k=0}^n B_k (z-a)^k \varphi_k(z)$  при любых постоянных  $B_k$  — *обобщенным*

*многочленом*; обобщенный многочлен  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n A_k (z-a)^k \varphi_k(z)$ , ко-

эффициенты которого определены по формуле (III), — *обобщенным мно-*  
*гочленом Тейлора функции  $f(z)$* ; ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} B_k (z-a)^k \varphi_k(z)$  — *обобщен-*

*ным степенным рядом*; ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k (z-a)^k \varphi_k(z)$  — *обобщенным ря-*  
*дом Тейлора функции  $f(z)$* .

Обобщенные многочлены и ряды Тейлора обладают некоторыми свойствами, сходными со свойствами обычных многочленов и рядов Тейлора.

**Теорема 2.** Среди всех обобщенных многочленов  $Q_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k (z-a)^k \varphi_k(z)$  обобщенный многочлен Тейлора  $P_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (z-a)^k \varphi_k(z)$  аналитической в круге  $|z-a| \leq R$  функции  $f(z)$  является единственным, представляющим эту функцию в том же круге с точностью до обобщенной степени с показателем не ниже  $n$ .

По формуле (II) в круге  $|z-a| \leq R$

$$f(z) = P_{n-1}(z) + R_n(z),$$

где  $R_n(z) = F(z) - c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots = (z-a)^n \varphi_n(z)$ .

Так как функция  $\varphi_n(z)$  — аналитическая в круге  $|z-a| \leq R$ , то  $(z-a)^n \varphi_n(z)$  — обобщенная степень с показателем  $n$  (когда  $\varphi_n(a) \neq 0$ ) или даже большим (когда  $\varphi_n(a) = 0$ ).

Тогда равенство  $f(z) = P_{n-1}(z) + (z-a)^n \varphi_n(z)$  показывает, что обобщенный многочлен Тейлора  $P_{n-1}(z)$  действительно представляет функцию  $f(z)$  с точностью до обобщенной степени с показателем не

ниже  $n$ . Остается еще показать, что среди обобщенных многочленов  $Q_{n-1}(z)$  других, обладающих таким же свойством, нет.

Допустим, что в круге  $|z - a| \leq R$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k u_k(z) + (z-a)^n \Phi_n(z),$$

где  $u_k(z) = (z-a)^k \varphi_k(z)$  — обобщенная степень с показателем  $k$ , а  $(z-a)^n \Phi_n(z)$  — обобщенная степень с показателем не ниже  $n$ .

Тогда при  $|z-a| \leq R$

$$f^{(j)}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k u_k^{(j)}(z) + [(z-a)^n \Phi_n(z)]^{(j)}.$$

Отсюда при  $j \leq n-1$

$$f^{(j)}(a) = \sum_{k=0}^j B_k u_k^{(j)}(a).$$

Это значит, что при всех  $j \leq n-1$   $B_j = A_j$ , т. е. обобщенный многочлен  $Q_{n-1}(z)$  действительно совпадает с обобщенным многочленом Тейлора  $P_{n-1}(z)$  функции  $f(z)$ .

**Теорема 3.** Если в круге  $|z-a| \leq R$  обобщенный степенной ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} B_k (z-a)^k \varphi_k(z)$  равномерно сходится к функции  $f(z)$ , то он является обобщенным рядом Тейлора этой функции.

При  $|z-a| \leq R$  находим:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k (z-a)^k \varphi_k(z) + (z-a)^n \sum_{k=n}^{\infty} B_k (z-a)^{k-n} \varphi_k(z),$$

или

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k (z-a)^k \varphi_k(z) + (z-a)^n \Phi_n(z),$$

где функции  $f(z)$  и  $\Phi_n(z)$  как суммы равномерно сходящихся рядов аналитических функций — аналитические в круге  $|z-a| \leq R$ . Тогда по теореме 2 получаем доказываемое:

$$B_k = A_k.$$

Простым следствием теоремы 3 является свойство единственности разложения функции в обобщенный степенной ряд:

Если в круге  $|z-a| \leq R$  два обобщенных степенных ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} B'_k (z-a)^k \varphi_k(z)$  и  $\sum_{k=0}^{\infty} B''_k (z-a)^k \varphi_k(z)$  равномерно сходятся к



одной и той же функции  $f(z)$ , то коэффициенты этих рядов соответственно равны друг другу.

В самом деле, по теореме 3  $B'_k = A_k$  и  $B''_k = A_k$ ; поэтому  $B'_k = B''_k$ .

5. Выбирая для обобщенной формулы Тейлора различные частные виды обобщенных степеней  $v_k(z) = (z-a)^k \varphi_k(z)$ , можно получить из нее, кроме самой формулы Тейлора, некоторые другие известные формулы для разложения аналитической функции  $f(z)$ .

1. При  $\varphi_k(z) = 1$  получается сама формула Тейлора:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k + \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{z-a}{t-a} \right)^n \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

2. При  $\varphi_k(z) = \frac{1}{[\varphi(z)]^k}$  получается формула Лагранжа:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \{f'(a)[\varphi(a)]^k\}^{(k-1)} \left[ \frac{z-a}{\varphi(z)} \right]^k + R_n(z),$$

где

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{z-a}{t-a} \right)^n \frac{f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \{f'(a)[\varphi(a)]^k\}^{(k-1)} \left[ \frac{t-a}{\varphi(t)} \right]^k}{t-z} dt.$$

3. При

$$\varphi_0(z) = 1 \text{ и } \varphi_k(z) = F^{(n-k)}(1) f^{(k)}(z) - F^{(n-k)}(0) f^{(k)}(a) \\ (1 \leq k \leq n)$$

получается формула Дарбу:

$$f(z) = f(a) + \\ + \frac{1}{F^{(n)}(0)} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \{F^{(n-k)}(1) f^{(k)}(z) - F^{(n-k)}(0) f^{(k)}(a)\} (z-a)^k + \\ + R_{n+1}(z),$$

где

$$R_{n+1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{z-a}{t-a} \right)^{n+1} \frac{f(t) - \frac{1}{F^{(n)}(0)} \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \varphi_k(t) (t-a)^k}{t-z} dt$$

и  $F(t)$  — любой полином степени  $n$ .

Коэффициенты  $A_k$  для формул Лагранжа и Дарбу мы выписали в готовом виде. Их можно определить рекуррентно по формуле (III), а в окончательном виде с помощью математической индукции.

В качестве одного из примеров простейшего приложения обобщенной формулы Тейлора приведем разложение правильной рациональной дроби  $\frac{f(z)}{(z-a)^n F(z)}$  на элементарные.

Пусть  $m$  — степень многочлена  $f(z)$ ,  $l$  — степень многочлена  $F(z)$ ,  $m < n + l$  и  $F(a) \neq 0$ .

Разложим  $f(z)$  по обобщенным степеням  $u_k(z) = (z-a)^k \varphi_k(z)$ , считая  $\varphi_k(z) = F(z)$  при  $k < n$  и  $\varphi_k(z) = 1$  при  $k \geq n$ .

Коэффициенты разложения определим по формуле (III). При этом если  $k \geq n + l > m$  и  $k > j$ , то  $f^{(k)}(a) = u_j^{(k)}(a) = 0$ , и, значит, с номера  $k = n + l$   $A_k = 0$ . В результате получается:

$$f(z) = A_0 F(z) + A_1 (z-a) F(z) + \dots + A_{n-1} (z-a)^{n-1} F(z) + \\ + A_n (z-a)^n + A_{n+1} (z-a)^{n+1} + \dots + A_{n+l-1} (z-a)^{n+l-1}.$$

Отсюда

$$\frac{f(z)}{(z-a)^n F(z)} = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + \frac{f_1(z)}{F(z)},$$

где  $f_1(z) = A_n + A_{n+1} (z-a) + \dots + A_{n+l-1} (z-a)^{l-1}$  — известный многочлен, степень которого ниже степени многочлена  $F(z)$ . Поэтому

дробь  $\frac{f_1(z)}{F(z)}$  опять правильная и процесс разложения может быть продолжен до полного завершения.

## ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИГРЕ

Игра, о которой здесь идет речь, заключается в следующем. На столе лежит некоторое количество  $N$  спичек. Двое играющих поочередно берут эти спички; при этом, для того чтобы начинающий не мог сразу забрать столько спичек, сколько ему требуется, оговаривается, что за один раз каждый из играющих может взять не более  $n$  спичек (где  $n < N$ , так как иначе это ограничение не было бы существенным, и  $n > 1$ , так как иначе игра не допускала бы никакого произвола). Если общее число  $N$  спичек нечетно, то после того, как все спички будут разобраны, у одного из играющих окажется на руках четное их число, а у второго — нечетное; выигравшим считается тот, кто наберет четное число спичек.

Спрашивается, при каких значениях  $N$  и  $n$  начинающий игру может обеспечить себе выигрыш и как следует играть в этом последнем случае?

Частный случай этой игры, а именно тот, когда  $N = 27$  и  $n = 4$  разобран в книге Б. А. Кордемского «Математическая смекалка» (3-е изд., М., Гостехиздат, 1956, стр. 202); вопрос заключается в том, чтобы разобрать общий случай (при этом правила беспроигрышной в указанном выше смысле игры будут, разумеется, зависеть от чисел  $N$  и  $n$ ). Читателям предлагается попытаться самостоятельно дать теорию этой игры и прислать ее изложение в редакцию. Здесь мы только укажем для облегчения этой задачи, что при  $n = 49$  начинающий всегда может выиграть, если только число  $N$  не оканчивается цифрами 01 или 51.

В. С. Новикова,

студентка III курса Орехово-Зуевского  
Педагогического института

## В. ТОМСОН (ЛОРД КЕЛЬВИН) О ПРОИЗВОДНОЙ

Войдя раз в аудиторию, Томсон внезапно обратился к слушателям с вопросом: что такое  $\frac{dy}{dx}$ ? В ответ он получил все мыслимые строго логические определения. Все они были отвергнуты: «Ах, бросьте вы этого Тодгентера (представитель чистой математики в Кембридже),  $\frac{dy}{dx}$  есть скорость!».

Из книги Ф. Клейна «Лекции о развитии математики в XIX столетии» М., — Л., 1937, стр. 280.

## О МНОГОЧЛЕНАХ, ОБРАЗУЮЩИХ ВОЗВРАТНУЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ 2-го ПОРЯДКА

В. П. Паламодов

(студент I курса МГУ)

Возвратная последовательность многочленов является обобщением возвратной числовой последовательности и превращается в нее при фиксированном значении переменного. В настоящей статье разбирается вопрос нахождения ее членов, а также рассматриваются некоторые последовательности, связанные с ней. Полученные результаты применены к некоторым частным последовательностям.

1. Пусть заданы два многочлена  $p_0(x)$ ,  $p_1(x)$ ; тогда соотношение

$$p_{n+2}(x) - x p_{n+1}(x) + b p_n(x) = 0$$

определяет многочлены, образующие последовательность 2-го порядка.

Как нетрудно проверить, при  $x^2 \neq 4b$  справедлива следующая формула:

$$p_n = p_1 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - p_0 b \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где

$$\alpha = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4b}}{2}, \quad \beta = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4b}}{2};$$

$$\alpha + \beta = x, \quad \alpha\beta = b^1).$$

2. Последовательность, у которой  $p_0 = 0$ ,  $p_1 = 1$ , назовем нулевой и обозначим ее  $n$ -й член через  $a_n$ :

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

---

<sup>1)</sup> См., например, А. И. Маркушевич, Возвратные последовательности, М.—Л., 1950, стр. 22 и след.

Докажем следующее тождество:

$$\begin{aligned} a_n &= C_{n-1}^0 x^{n-1} - C_{n-2}^1 x^{n-3} b + C_{n-3}^2 x^{n-5} b^2 - \dots = \\ &= \sum_{i=0} C_{n-1-i}^i x^{n-1-2i} (-b)^i. \end{aligned} \quad (2)$$

(Здесь и дальше отсутствие верхнего предела при знаке  $\sum$  будет означать, что суммируемые члены берутся до тех пор, пока они имеют смысл.)

Как нетрудно видеть, это тождество верно для  $n=2$ ,  $n=3$ .

Пусть оно верно для  $k-1$  и  $k$ , т. е.

$$a_{k-1} = \sum_{i=0} C_{k-2-i}^i x^{k-2-2i} (-b)^i, \quad a_k = \sum_{i=0} C_{k-1-i}^i x^{k-1-2i} (-b)^i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= x a_k - b a_{k-1} = \\ &= \sum_{i=0} C_{k-1-i}^i x^{k-2i} (-b)^i + \sum_{i=0} C_{k-2-i}^i x^{k-2-2i} (-b)^{i+1}. \end{aligned}$$

Во второй сумме сделаем преобразование индекса суммирования  $j=i+1$  и примем условно  $C_k^{-1}=0$ . В таком случае

$$\sum_{i=0} C_{k-2-i}^i x^{k-2-2i} (-b)^{i+1} = \sum_{j=0} C_{k-1-j}^{j-1} x^{k-2j} (-b)^j,$$

откуда

$$a_{k+1} = \sum_{i=0} x^{k-2i} (-b)^i [C_{k-1-i}^i + C_{k-1-i}^{i-1}] = \sum_{i=0} x^{k-2i} (-b)^i C_{k-i}^i.$$

Таким образом, тождество 2 доказано.

3. Рассмотрим одну частную последовательность, связанную с нулевой:

$$b_n = a_{n+1} - b a_{n-1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \alpha \beta \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \alpha^n + \beta^n.$$

Найдем разложение ее членов по степеням  $x$ :

$$b_n = \sum_{i=0} x^{n-2i} C_{n-i}^i (-b)^i + \sum_{i=0} x^{n-2-2i} C_{n-2-i}^i (-b)^{i+1}.$$

Положим  $j=i+1$ ; тогда

$$\sum_{i=0} x^{n-2-2i} C_{n-2-i}^i (-b)^{i+1} = \sum_{j=0} x^{n-2j} C_{n-1-j}^{j-1} (-b)^j$$

II

$$b_n = \sum_{i=0} x^{n-2i} (-b)^i [C_{n-i}^i + C_{n-i-1}^{i-1}] = n \sum_{i=0} x^{n-2i} (-b)^i \frac{C_{n-i}^i}{n-i}. \quad (2')$$

Из последнего тождества и из тождества (2) нетрудно получить

$$\frac{db_n}{dx} = n a_n. \quad (2'')$$

4. Сравнивая различные выражения для  $a_n$  и  $b_n$ , получаем интересные тождества:

$$\frac{1}{2^n \sqrt{x^2 - 4b}} \left[ (x + \sqrt{x^2 - 4b})^n - (x - \sqrt{x^2 - 4b})^n \right] = \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-2i} (-b)^i C_{n-1-i}^i, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2^n} \left[ (x + \sqrt{x^2 - 4b})^n + (x - \sqrt{x^2 - 4b})^n \right] = n \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-2i} (-b)^i \frac{C_{n-i}^i}{n-i}. \quad (3')$$

Теперь положим  $\frac{x}{2\sqrt{b}} = \cos \varphi$ ; тогда

$$a_n = \frac{b^{\frac{n}{2}} [(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n - (\cos \varphi - i \sin \varphi)^n]}{2\sqrt{b} i \sin \varphi} = b^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}, \quad (I)$$

$$b_n = b^{\frac{n}{2}} [(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n + (\cos \varphi - i \sin \varphi)^n] = 2b^{\frac{n}{2}} \cos n\varphi. \quad (II)$$

Для многочленов общей последовательности  $p_n$  можно получить разложение по степеням  $x$  с помощью формулы

$$p_n = p_1 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - b p_0 \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = p_1 a_n - p_0 b a_{n-1}.$$

5. Если положить в тождестве (3')  $b = \frac{1}{4}$ , то получим разложение по степеням  $x$  для полиномов Чебышева:

$$b_n = T_n = n \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-2i} \left(-\frac{1}{4}\right)^i \frac{C_{n-i}^i}{n-i}, \quad \text{где } T_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x),$$

а из тождества (2'') — соотношение

$$\frac{T'_{n+2}}{n+2} - x \frac{T'_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{4} \frac{T'_n}{n} = 0.$$

Далее, из тождеств

$$\begin{aligned} \sin(n+1)\varphi &= \sin \varphi \cos n\varphi + \sin n\varphi \cos \varphi, \\ \cos(n+1)\varphi &= \cos n\varphi \cos \varphi - \sin n\varphi \sin \varphi \end{aligned}$$

получаем:

$$\begin{aligned} 2a_{n+1} &= x a_n + b_n, \\ 2b_{n+1} &= x b_n + (x^2 - 4b) a_n. \end{aligned}$$

Теперь в тождествах (3) и (I) положим  $x=1$ ,  $b=-1$ ; тогда

$$\frac{1}{2^n \sqrt{5}} \left[ (1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n \right] = \\ = \sum_{i=0}^n C_{n-1-i}^i = i^{n-1} \frac{2 \sin \left( n \arccos \frac{1}{2i} \right)}{\sqrt{5}}.$$

Левая часть представляет известное выражение для  $u_n$  —  $n$ -го члена ряда Фибоначчи:

$$c_{n-1}^0 + c_{n-2}^1 + c_{n-3}^2 + \dots = u_n = 2i^{n-1} \frac{\sin \left( n \arccos \frac{1}{2i} \right)}{\sqrt{5}}.$$

В тождестве (I) положим  $x=b=1$ ; тогда

$$a_n = \sum_{i=0}^n C_{n-1-i}^i (-1)^i = \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}}.$$

Аналогичным способом из тождеств (3') и (II) получаем еще два равенства:

$$\sum_{i=0}^n \frac{C_{n-i}^i}{n-i} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{n}, \\ n \sum_{i=0}^n \frac{c_{n-i}^i}{n-i} (-1)^i = 2 \cos \frac{n\pi}{3}.$$

6. Займемся теперь вопросом отыскания возвратных соотношений для последовательностей

$$p_{kn}, p_n^k, \frac{a_{kn}}{a_n} \quad (k = \text{const}),$$

где  $p_n, a_n$  — многочлены, определенные в пп. 1, 2.

Пусть некоторая последовательность  $t_n(x)$  удовлетворяет возвратному соотношению

$$t_n + c_1 t_{n-1} + c_2 t_{n-2} + \dots + c_k t_{n-k} = 0,$$

где  $c_i(x)$  — некоторые функции от  $x$ .

Будем говорить что ей соответствует многочлен

$$B(y) = y^k + c_1 y^{k-1} + c_2 y^{k-2} + \dots + c_k,$$

а левую часть предпоследнего равенства обозначать через  $B(t_n)$ .

Но последовательности  $t_n$  соответствует бесконечное множество многочленов. Действительно, пусть

$$B_1 = (y+a)B = y^{k+1} + (c_1+a)y^k + (c_2+ac_1)y^{k-1} + \dots + c_k ay.$$

Тогда

$$B_1(t_n) = t_n + (a + c_1)t_{n-1} + (c_2 + ac_1)t_{n-2} + \dots + ac_k t_{n-k-1} = \\ = t_n + c_1 t_{n-1} + c_2 t_{n-2} + \dots + c_k t_{n-k} + a(t_{n-1} + c_1 t_{n-2} + c_k t_{n-k-1}) = 0.$$

Заметим, что вообще, если  $BR = Q$  и  $R(t_n) = s_n$ , то  $B(s_n) = Q(t_n)$ .

Но, как нетрудно видеть, существует единственный многочлен наименьшей степени, соответствующий данной последовательности. Действительно, пусть  $B_1$  и  $B_2$  — два многочлена одинаковой степени и

$$B_1(t_n) = 0, \quad B_2(t_n) = 0;$$

тогда разность этих многочленов  $kB = B_1 - B_2$  имеет степень ниже, чем степень  $B_1$  и  $B_2$ , где  $k$  — старший коэффициент разности  $B_1 - B_2$ , и

$$B(t_n) = \frac{1}{k} [B_1(t_n) - B_2(t_n)] = 0,$$

откуда следует, что не может быть двух многочленов наименьшей степени.

7. Назовем многочлен наименьшей степени, соответствующий данной последовательности, *каноническим*, а его степень — *порядком* этой последовательности.

Пусть теперь  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ , ...,  $\lambda(x)$  — непрерывные функции от  $x$ , среди которых нет тождественно равных между собой и равных нулю.

Докажем, что в таком случае каноническим многочленом последовательности

$$t_n = a\alpha^n + b\beta^n + \dots + l\lambda^n,$$

где  $a(x)$ ,  $b(x)$ , ...,  $l(x)$  — некоторые функции от  $x$ , будет являться многочлен

$$P = (y - \alpha)(y - \beta) \dots (y - \lambda).$$

Действительно, пусть некоторый многочлен

$$P' = (y - \alpha')(y - \beta') \dots (y - \varphi')$$

— канонический для этой последовательности.

Пусть

$$s_n = t_n - \alpha' t_{n-1} = a\alpha^n \left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) + b\beta^n \left(1 - \frac{\alpha'}{\beta}\right) + \dots + l\lambda^n \left(1 - \frac{\alpha'}{\lambda}\right), \\ R = (y - \beta') \dots (y - \varphi');$$

тогда, как мы ранее заметили,

$$R(s_n) = P'(t_n).$$

Далее, пусть

$$v_n = s_n - \beta' s_{n-1} = a\alpha^n \left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{\beta'}{\alpha}\right) + \dots + l\lambda^n \left(1 - \frac{\alpha'}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{\beta'}{\lambda}\right), \\ Q = (y - \gamma') \dots (y - \varphi'),$$



тогда

$$Q(v_n) = R(s_n) = P'(t_n) \text{ и т. д.,}$$

$$P' = a\alpha^n \left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{\beta'}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{\varphi'}{\alpha}\right) + b\beta^n \left(1 - \frac{\alpha'}{\beta}\right) \left(1 - \frac{\beta'}{\beta}\right) \times \dots$$

$$\dots \times \left(1 - \frac{\varphi'}{\beta}\right) + \dots + \lambda^n \left(1 - \frac{\alpha'}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{\beta'}{\lambda}\right) \dots \left(1 - \frac{\varphi'}{\lambda}\right).$$

Теперь пусть  $c, d, \dots, r$  — те из коэффициентов при  $\alpha^n, \beta^n, \dots, \lambda^n$ , которые не равны тождественно нулю; тогда

$$P'(t_n) = c\gamma^n + d\delta^n + \dots + r\rho^n.$$

Так как среди  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  нет тождественно равных между собой и нет тождественно равных нулю, то найдется такое  $x_0$ , что все числа  $\alpha(x_0), \beta(x_0), \dots, \lambda(x_0)$  отличны друг от друга и от нуля. В таком случае, при достаточно большом  $n$ ,  $P'(t_n) \neq 0$ . Отсюда следует, что все коэффициенты при  $a\alpha^n, b\beta^n, \dots, \lambda^n$  равны нулю, т. е. среди  $\alpha', \beta', \dots, \varphi'$  встречаются все  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ . С другой стороны,  $P(t_n) = 0$ ; значит, степень  $P'$  не превосходит степени  $P$ , откуда  $P' = P$ .

### 8. Для последовательности

$$t_n = p_{kn} = p_1 \frac{\alpha^{kn} - \beta^{kn}}{\alpha - \beta} - p_0 b \frac{\alpha^{kn-1} - \beta^{kn-1}}{\alpha - \beta} = q_1 \alpha^{kn} + q_2 \beta^{kn}$$

канонический многочлен имеет вид

$$P = y^2 - (\alpha^k + \beta^k)y + \alpha^k \beta^k = y^2 - b_k y + b^k,$$

т. е.

$$p_k(n+2) - b_k p_k(n+1) + b^k p_{kn} = 0.$$

### 9. Найдем канонический многочлен для последовательностей

$$t_n = p_n^k = \sum_{i=0}^n C_k^i \alpha^{(k-i)n} \beta^{in} q_1^{k-i} q_2^i \quad \text{и} \quad s_n = \frac{a_{(k+1)n}}{a_n} = \sum_{i=0}^k \alpha^{(k-i)n} \beta^{in}.$$

Он имеет вид:

$$F_{k+1} = (y - \alpha^k)(y - \alpha^{k-1}\beta) \dots (y - \alpha\beta^{k-1})(y - \beta^k). \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$a_{(0)}! = 1, \quad a_{(k)}! = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k; \quad \left| \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right| = \frac{a_{(n)}!}{a_{(i)}! a_{(n-i)}!}.$$

Теперь докажем тождество

$$F_n = y^n - \left| \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right| y^{n-1} + \left| \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right| b y^{n-2} - \left| \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right| b^3 y^{n-3} + \dots + (-1)^n b^{\frac{n(n-1)}{2}} =$$

$$= \sum_{i=0}^n y^{n-i} b^{\frac{i(i-1)}{2}} \left| \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right| (-1)^i. \quad (4')$$

Проверим его справедливость для  $n=2$ .

$$F_2 = (y - \alpha)(y - \beta) = y^2 - (\alpha + \beta)y + \alpha\beta = y^2 - \frac{a_2!}{a_1!a_1!}y + b.$$

Пусть теперь

$$F_k = \sum_{i=0}^k y^{k-i} b^{\frac{i(i-1)}{2}} \left| \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right| (-1)^i.$$

Рассмотрим выражение

$$F_k(y) = \alpha^k F_k\left(\frac{y}{\alpha}\right) [y - \beta^k].$$

Из нашего допущения следует

$$F'_k = \sum_{i=0}^k y^{k+1-i} \alpha^i b^{\frac{i(i-1)}{2}} \left| \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right| (-1)^i + \sum_{i=0}^k y^{k-i} \alpha^i b^{\frac{i(i-1)}{2}} \left| \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right| \beta^k (-1)^{i+1}.$$

Во второй сумме сделаем преобразования знака суммирования

$$j = i + 1 \text{ и примем условно } \left| -i \right| = \left| \begin{matrix} k \\ k+1 \end{matrix} \right| = 0:$$

$$\sum_{i=0}^k y^{k-i} \alpha^i b^{\frac{i(i-1)}{2}} \left| \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right| \beta^k (-1)^{i+1} = \sum_{j=0}^{k+1} y^{k+1-j} b^{\frac{j(j-1)}{2}} \beta^{k-j+1} (-1)^j \left| \begin{matrix} k \\ j-1 \end{matrix} \right|,$$

$$F_k = \sum_{i=0}^{k+1} y^{k+1-i} b^{\frac{i(i-1)}{2}} (-1)^i \left[ \alpha^i \left| \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right| + \beta^{k-i+1} \left| \begin{matrix} k \\ i-1 \end{matrix} \right| \right].$$

Рассмотрим выражение, стоящее в квадратных скобках:

$$\begin{aligned} \alpha^i \left| \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right| + \beta^{k-i+1} \left| \begin{matrix} k \\ i-1 \end{matrix} \right| &= \frac{a_{(k)}!}{a_{(i)}! a_{(k-i+1)}!} (\alpha^i a_{k-i+1} + \beta^{k-i+1} a_i) = \\ &= \frac{a_{(k)}!}{a_{(i)}! a_{(k-i+1)}!} \frac{\alpha^{k+1} - \alpha^i \beta^{k-i+1} + \alpha^i \beta^{k-i+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta} = \frac{a_{(k+1)}!}{a_{(i)}! a_{(k-i+1)}!} = \left| \begin{matrix} k+1 \\ i \end{matrix} \right|. \end{aligned}$$

Итак,

$$F'_k = \sum_{i=0}^{k+1} y^{k+1-i} b^{\frac{i(i-1)}{2}} \left| \begin{matrix} k+1 \\ i \end{matrix} \right| (-1)^i.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} F'_k(y) &= \alpha^k F_k\left(\frac{y}{\alpha}\right) [y - \beta^k] = \alpha^k \left(\frac{y}{\alpha} - \alpha^{k-1}\right) \left(\frac{y}{\alpha} - \alpha^{k-2}\beta\right) \times \dots \\ &\dots \times \left(\frac{y}{\alpha} - \beta^{k-1}\right) (y - \beta^k) = (y - \alpha^k) (y - \alpha^{k-1}\beta) \dots (y - \beta^k) = F_{k+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, тождество (4) доказано.

Итак, последовательности

$$p_n^k \text{ и } \frac{a_{(k+n)_2}}{a_n}$$

имеют порядок  $k+1$ , и

$$\sum_{i=0}^{k+1} p_{n-i}^k \left| k+1 \right| b^{\frac{i(i-1)}{2}} (-1)^i = 0, \quad (5)$$

$$\sum_{i=0}^k \frac{a_{k(n-i)}}{a_{n-i}} \left| k \right| b^{\frac{i(i-1)}{2}} (-1)^i = 0. \quad (5')$$

10. Все наши рассуждения проводились в допущении  $x^2 \neq 4b$ , т. е.  $\alpha \neq \beta$ . При  $\alpha = \beta$  теряет смысл выражение, стоящее в правой части равенства (1), однако

$$\begin{aligned} p_n &= p_1 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - p_0 b \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \\ &= p_1 \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-i-1} \beta^i - p_2 \sum_{i=0}^{n-2} \alpha^{n-1-i} \beta^{i+1}. \end{aligned}$$

Поэтому положим, по непрерывности, при  $\alpha = \beta$

$$p_n = n p_1 \alpha^{n-1} - (n-1) p_0 \alpha^n.$$

Теперь  $p_n$  будет непрерывен по  $\alpha$  и  $\beta$  при любых  $\alpha$  и  $\beta$ .

Отсюда следует, что при  $\alpha = \beta$  будут справедливы тождества (5) и (5'), так как их левые части — непрерывные функции от  $\alpha$  и  $\beta$ . Положим  $\alpha = \beta = 1$  и  $p_n = a_n$ . Тогда из тождества (5) следует

$$\sum_{i=0}^{k+1} (n-i)^k C_{k+1}^i (-1)^i = 0.$$

Однако доказательство каноничности многочлена  $F_k$  теряет силу. Можно показать, что для последовательности  $n^k$  многочлен  $F_k$  все же будет каноническим; для последовательности  $\frac{x_{kn}}{a_n} = k$  каноническим будет многочлен  $y = k$ .

Из тождества (2), учтя, что  $x=2$ ,  $b=1$ , получим:

$$\sum_{i=0} 2^{n-2i} C_{n-i}^i (-1)^i = n+1.$$

# 11. Тождество

$$\sin(x+2\alpha) - 2 \cos \alpha \sin(x+\alpha) + \sin x = 0$$

показывает, что последовательность  $s_n = \sin(x+nx)$  является возвратной при значениях  $x=2 \cos \alpha$ ,  $b=1$ .

При этом

$$a_n = \frac{\sin nx}{\sin \alpha}, \quad b_n = 2 \cos nx.$$

Тождества (2) и (2') дают разложения:

$$\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = \sum_{i=0}^n C_{n-i}^i (2\cos\varphi)^{n-2i} (-1)^i,$$

$$2\cos n\varphi = n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{C_{n-i}^i}{n-i} (2\cos\varphi)^{n-2i} (-1)^i.$$

Интересные результаты дают тождества (5) и (5'):

$$\sum_{i=0}^{k+1} \sin^k(n-i)\alpha \frac{\sin[(k+1)\alpha]!}{\sin(i\alpha)! \sin[(k+1-i)\alpha]!} (-1)^i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^k \frac{\sin(n-i)\alpha}{\sin(n-i)\alpha} \frac{\sin(k\alpha)!}{\sin(i\alpha)! \sin[(k-i)\alpha]!} (-1)^i = 0,$$

где

$$\sin(n\alpha)! = \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \dots \cdot \sin n\alpha, \quad \sin(0)! = 1.$$

Получим выражения для  $F_{k+1}(\pm 1)$ :

$$F_{k+1}(\pm 1) = \prod_{i=0}^k (\pm 1 - \alpha^{k-1}\beta^i) =$$

$$= \begin{cases} \text{при } k=2m & \prod_{i=0}^{m-1} (1 \mp b^i b_{k-2i} + b^k) (\pm 1 - b^m), \\ \text{при } k=2m+1 & \prod_{i=0}^m (1 \mp b^i b_{k-2i} + b^k). \end{cases}$$

Для последовательности  $s_n$  отсюда получаем тождества:

$$\sum_{i=0}^n \frac{\sin(n\alpha)!}{\sin(i\alpha)! \sin[(n-i)\alpha]!} (-1)^i = 2^n \prod_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sin^2\left(\frac{n-1}{2} - i\right)\alpha,$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{\sin(n\alpha)!}{\sin(i\alpha)! \sin[(n-1)\alpha]!} = 2^n \prod_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \cos^2\left(\frac{n-1}{2} - i\right)\alpha.$$

Аналогичные тождества можно получить и для гиперболических функций.

## О СХОДИМОСТИ РЯДА $1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots$

Как известно, самые простые признаки сходимости не дают возможности установить сходимость ряда  $1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \dots + \frac{1}{5^x} + \dots$  при  $x > 1$ ; здесь приходится привлекать более тонкие признаки. Между тем, существует совсем простой и абсолютно элементарный способ, позволяющий убедиться в сходимости ряда и оценить его сумму. Обозначим (конечную или бесконечную! — этого мы еще не знаем) сумму рассматриваемого ряда через  $A$ ; в таком случае, очевидно, имеем:

$$\frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \dots = \frac{1}{2^x} \cdot A \quad \text{и} \quad \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + \dots \leq \frac{1}{2^x} \cdot A$$

(ибо члены второго ряда меньше соответствующих членов первого). Отсюда имеем:

$$A = 1 + \left( \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \dots \right) + \left( \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + \dots \right) \leq 1 + \frac{1}{2^x} A + \frac{1}{2^x} A$$

и, следовательно,

$$A - \frac{1}{2^{x-1}} A \leq 1, \quad A \leq \frac{2^{x-1}}{2^{x-1} - 1}.$$

В. П. Паламонов,  
студент I курса МГУ

## РЕШЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Если  $\omega$  обозначает какой-либо из комплексных корней третьей степени из  $-1$ , то имеет место, как легко проверить, тождество

$$(x + y + z)(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Отсюда следует, что многочлен третьей степени относительно  $x$

$$x^3 - 3x \cdot yz + (y^3 + z^3)$$

имеет корни

$$x_1 = -(y + z), \quad x_2 = -(\omega y + \omega^2 z), \quad x_3 = -(\omega^2 y + \omega z).$$

Таким образом, для решения кубического уравнения

$$x^3 + ax + b = 0$$

остается подобрать значения для  $y$  и  $z$  такие, чтобы

$$-3yz = a, \quad y^3 + z^3 = b,$$

что сводится, очевидно, к решению квадратного уравнения.

Из *Mathematical Gazette*, 1955 г., № 39, стр. 139.

## О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Ф. С. Рофе-Бекетов

(Харьков)

В статье исследуется краевая задача для дифференциального уравнения  $y'' = f(x, y)$  при некоторых предположениях относительно функции  $f(x, y)$ <sup>1)</sup>. При этом используется метод, близкий к известному методу С. А. Чаплыгина<sup>2)</sup>.

Вышедший в 1954 г. русский перевод второго тома книги Сансоне<sup>3)</sup>, а также ряд журнальных статей последних лет<sup>4)</sup> содержат исследование сходных вопросов, однако результаты указанных работ и данной статьи взаимно не перекрываются. Одним из ее отличий является то, что в рассматриваемой конечной области функция  $f(x, y)$  не предполагается ограниченной и на границе области допускаются разрывы  $f(x, y)$ . (Зато в некоторых из указанных работ допускается зависимость правой части уравнения и от  $y'$ .)

Кроме того, рассматриваемая здесь задача решается сравнительно элементарными приемами, и, с другой стороны, полученная теорема допускает довольно широкие обобщения, о которых говорится в конце статьи.

<sup>1)</sup> В основу настоящей статьи положена работа, доложенная в апреле 1953 г. на студенческой научной конференции в Харьковском гос. университете (Тезисы доклада были опубликованы в сборнике «Итоговая студенческая научная конференция 11—18 апреля 1953 г. Тезисы докладов», Изд-во Харьковского гос. университета, 1953, стр. 199). Работа эта была выполнена под руководством профессора В. А. Марченко, которому автор приносит глубокую благодарность.

<sup>2)</sup> С. А. Чаплыгин, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1950.

<sup>3)</sup> Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II, ИЛ, 1954, гл. VIII, §§ 6, 7.

<sup>4)</sup> Б. Н. Бабкин, Решение одной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка методом Чаплыгина, журнал «Прикладная математика и механика», XVIII, вып. 2, 1954; И. П. Мысовских, Применение метода Чаплыгина к решению задачи Дирихле для одного частного типа эллиптических дифференциальных уравнений, ДАН СССР, XCIX, № 1, 1954; Ю. Н. Кондюрин, О сходимости метода Чаплыгина для решения двухточечной граничной задачи, Вестник Ленинградского университета, № 19, вып. 4, 1956.

Итак, дано дифференциальное уравнение

$$y'' = f(x, y), \quad (1)$$

для которого ищется решение при условиях

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (2)$$

Предположим, что существуют при  $x \in [a, b]$  две кривые  $y = p(x)$  и  $y = q(x)$  [ $p(x) \geq q(x)$ ], такие, что

$$p''(x) \leq f(x, p(x)), \quad q''(x) \geq f(x, q(x)); \quad (3)$$

$$p(a) \geq A \geq q(a), \quad p(b) \geq B \geq q(b). \quad (4)$$

Производные  $p''(x)$  и  $q''(x)$  могут иметь конечное число разрывов, но должны быть абсолютно интегрируемыми.

Предполагается далее, что в области  $S$

$$a \leq x \leq b, \quad q(x) \leq y \leq p(x) \quad (5)$$

между кривыми  $p(x)$  и  $q(x)$  функция  $f(x, y)$  непрерывна, за исключением, быть может, конечного числа точек, лежащих на граничных кривых  $p(x)$  и  $q(x)$ . И пусть в этой области  $f(x, y)$  монотонно убывает (хотя бы не возрастает) по  $y$ . Тогда имеет место следующая

*Теорема. При перечисленных выше условиях краевая задача (1)–(2) имеет по крайней мере одно решение, лежащее в области  $S$  (5).*

Ниже будет указан простой способ построения последовательности функций, которая монотонно и равномерно сходится к решению задачи.

Отметим, что предположение о конечности числа точек разрыва  $f(x, y)$  сделано лишь для простоты доказательства. Достаточно потребовать, чтобы множество точек разрыва имело конечное число точек сгущения.

Прежде чем переходить к доказательству, рассмотрим два примера применения этой теоремы.

Пример 1. Имеет ли решение краевая задача

$$y'' = \frac{\sin^2 x}{3y^2}, \quad y(-1) = y(1) = 1? \quad (6)$$

Оказывается, что имеет. Действительно, функция  $q(x) = x^{\frac{4}{3}}$  удовлетворяет уравнению

$$q'' = \frac{4}{9} \frac{x^2}{q^2} \geq f(x, q) = \frac{\sin^2 x}{3q^2}$$

и другим условиям теоремы. В качестве функции  $p(x)$  можно взять  $p \equiv 1$ ;  $f(x, y)$  убывает по  $y$  в области  $S$  (5) и остальные условия теоремы тоже выполняются, а потому задача (6) разрешима.

Пример 2. Требуется определить, при каких значениях параметра  $\lambda$  разрешима краевая задача

$$y'' = \frac{\lambda e^x}{\sqrt{y}}, \quad y(0) = y(1) = 1. \quad (7)$$

Что касается отрицательных значений  $\lambda$ , то легко проверяется, помимо теоремы, что задача имеет единственное решение при любом  $\lambda < 0$ .

Мы исследуем значения  $\lambda \geq 0$ . Заметим следующее: если при некотором  $\lambda_0 > 0$  существует решение  $y_0(x)$  задачи (7), то задача имеет решение и при всех  $\lambda \leq \lambda_0$ , так как в этом случае можно положить  $p(x) \equiv 1$ ,  $q(x) = y_0(x)$  и применить теорему.

Теперь покажем, что существует такое  $\lambda_0 > 0$ , что при  $\lambda > \lambda_0$  решений задачи (7) нет, а при  $\lambda \leq \lambda_0$  есть, и дадим для  $\lambda_0$  оценку (правда, довольно грубую). Рассмотрим для этого две вспомогательные задачи:

$$u'' = \frac{\lambda}{\sqrt{u}}, \quad u(0) = u(1) = 1, \quad (8)$$

$$v'' = \frac{\lambda e}{\sqrt{v}}, \quad v(0) = v(1) = 1. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) интегрируются в элементарных функциях, и можно непосредственно установить, что задача (8) разрешима при  $\lambda \leq \lambda_1 = \frac{32}{9} \approx 3,6$ , а задача (9) — при  $\lambda \leq \lambda_2 = \frac{32}{9e} \approx 1,3$ . При больших значениях  $\lambda$  задачи неразрешимы. При  $\lambda = \lambda_1$  и  $\lambda = \lambda_2$  интегральные кривые соответственно задач (8) и (9) касаются оси абсцисс.

Чтобы применить теорему, положим  $p \equiv 1$ ,  $q = v(x)$ . Видим, что задача (7) разрешима при всех значениях  $\lambda$ , при которых разрешима задача (9), т. е. при  $\lambda \leq \lambda_2$ . С другой стороны, принимая решение задачи (7) за функцию  $q(x)$  и снова полагая  $p \equiv 1$ , увидим, что при всех тех  $\lambda$ , при которых разрешима задача (7), задача (8) тоже должна иметь решения. Но при  $\lambda > \lambda_1$  задача (8) неразрешима. Значит, и наша задача (7) тоже не имеет решений при  $\lambda > \lambda_1$ . Значит,  $\lambda_2 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1$ , и при  $\lambda < \lambda_0$  задача (7) разрешима, а при  $\lambda > \lambda_0$  нет. Можно легко доказать, что и при  $\lambda = \lambda_0$  решение задачи (7) существует. Итак,  $\lambda_0$  — наибольшее число, при котором задача (7) разрешима и  $1,3 \leq \lambda_0 \leq 3,6$ .

Вернемся теперь к сформулированной выше теореме. Сначала докажем одну простую лемму.

**Лемма.** Если  $p''(x) \leq q''(x)$  при  $a < x < b$  и  $p(a) \geq q(a)$ ,  $p(b) \geq q(b)$ , то  $p(x) \geq q(x)$  в интервале  $(a, b)$ .

**Доказательство.** Положим  $r(x) = p(x) - q(x)$ . Тогда  $r(a) \geq 0$ ,  $r(b) \geq 0$  и  $r''(x) \leq 0$  при  $x \in (a, b)$ . Значит, дуга  $y = r(x)$  обращена выпуклостью вверх, и концы ее имеют неотрицательные ординаты. Значит,  $r(x) \geq 0$ , т. е.  $p(x) \geq q(x)$  при  $x \in (a, b)$ , ч. т. д.

**Доказательство теоремы.** Выведем сначала формулу для решения краевой задачи для более простого уравнения (здесь  $\varphi(x)$  — некоторая интегрируемая функция):

$$y'' = \varphi(x), \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (10)$$



Очевидно,

$$y(x) = \int_0^x dt \int_0^1 \varphi(s) ds + Cx + D.$$

Из краевых условий находим  $C$  и  $D$  и окончательно получаем:

$$y(x) = \int_0^x dt \int_0^1 \varphi(s) ds - x \int_0^1 dt \int_0^1 \varphi(s) ds. \quad (11)$$

Заметим, что, не уменьшая общности, можно считать при доказательстве, что задача (1) — (2) поставлена тоже для краевых условий  $y(0) = y(1) = 0$ , так как этого всегда можно добиться простой заменой переменной и функции, не влияя на выполняемость условий теоремы. Итак,

$$y'' = f(x, y), \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (12)$$

Строим последовательность функций  $y_n(x)$ , являющихся решениями ряда краевых задач:

$$y_0''(x) = f(x, p(x)), \quad y_0(0) = y_0(1) = 0, \quad (13)$$

$$y_1''(x) = f(x, y_0(x)), \quad y_1(0) = y_1(1) = 0 \quad (14)$$

и, вообще,

$$y_n''(x) = f(x, y_{n-1}(x)), \quad y_n(0) = y_n(1) = 0. \quad (15)$$

Все эти задачи имеют решение. Если воспользоваться формулой (11), положив там  $\varphi(x) = f(x, y_{n-1}(x))$ , то из (15) получим:

$$y_n(x) = \int_0^x dt \int_0^1 f(s, y_{n-1}(s)) ds - x \int_0^1 dt \int_0^1 f(s, y_{n-1}(s)) ds. \quad (16)$$

При этом последовательность  $y_n(x)$  монотонная и заключена между  $p(x)$  и  $q(x)$ , т. е.

$$p(x) \geq y_0(x) \geq \dots \geq y_n(x) \geq y_{n+1}(x) \geq \dots \geq q(x). \quad (17)$$

Действительно, так как  $f(x, y)$  не возрастает по  $y$  и в силу условий (3), мы получаем из (13):

$$p''(x) \leq f(x, p(x)) = y_0''(x) \leq f(x, q(x)) \leq q''(x).$$

Так как выполнены и остальные условия леммы, то  $p(x) \geq y_0(x) \geq q(x)$ . Далее, из (14) получим, что  $y_0''(x) \leq y_1''(x) \leq q''(x)$ , и по лемме имеем:  $y_0(x) \geq y_1(x) \geq q(x)$ . Продолжая аналогичным образом дальше, убедимся, что

$$p''(x) \leq y_n''(x) \leq y_{n+1}''(x) \leq q''(x) \quad (18)$$

и что (17) справедливо.

Так как последовательность  $y_n(x)$  монотонна и ограничена, то она сходится к некоторой предельной функции  $y(x) \geq q(x)$ . Каждая функция  $y_n(x)$  имеет непрерывную производную, как видно из (16) и из условий теоремы. Так как  $y_n(0) = y_n(1) = 0$ , то по теореме Ролля в интервале  $(0, 1)$  найдется точка  $\xi$ , такая, что  $y'_n(\xi) = 0$ . Поэтому

$y'_n(x) = \int_{\xi}^x y''_n(s) ds$ . Оценив этот интеграл с учетом (18), получим:

$$|y'_n(x)| \leq \max \left\{ \int_0^1 |p''(t)| dt, \int_0^1 |q''(t)| dt \right\}. \quad (19)$$

Это значит, что функции  $y_n(x)$  имеют равномерно ограниченные производные, а потому равномерно непрерывны и сходящаяся их последовательность должна сходиться равномерно, что вытекает из теоремы Арцела<sup>1)</sup>. Отсюда следует, что функция  $y(x)$  непрерывна.

Докажем, что в равенстве (16) можно сделать предельный переход под знаком интеграла при  $n \rightarrow \infty$ . Для простоты записи допустим, что  $f(x, y)$  терпит разрыв лишь в одной точке  $(x_0, q(x_0))$  на границе области (5).

Из монотонности  $f(x, y)$  по  $y$  и из соотношений (3) и (17) следует, что

$$p''(x) \leq f(x, y_n(x)) \leq q''(x), \quad (20)$$

и так как функции  $p''(x)$  и  $q''(x)$  абсолютно интегрируемые, то для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta$ , что при любом  $n$

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(s, y_n(s))| ds < \varepsilon. \quad (21)$$

Так как на остальной части промежутка  $(0, 1)$ , т. е. на  $(0, x_0 - \delta)$  и  $(x_0 + \delta, 1)$  последовательность  $f(x, y_n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x, y(x))$  равномерно в силу непрерывности  $f(x, y)$  и равномерной сходимости  $y_n(x)$  к  $y(x)$ , то существует такое  $N(\varepsilon)$ , что при  $n \geq N(\varepsilon)$

$$\int_0^{x_0-\delta} + \int_{x_0+\delta}^1 |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds < \varepsilon. \quad (22)$$

Учитывая, что (21) справедливо и для  $\int |f(s, y(s))| ds$ , получаем из (21) и (22), что при  $n \geq N(\varepsilon)$  и любом  $t \in (0, 1)$

$$\left| \int_0^t f(s, y_n(s)) ds - \int_0^t f(s, y(s)) ds \right| < 3\varepsilon, \quad (23)$$

как бы мало ни было  $\varepsilon$ .

<sup>1)</sup> См. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.—Л., 1952, стр. 40.

Значит, в (16) возможен предельный переход в обеих частях равенства, и мы получаем:

$$y(x) = \int_0^x dt \int_0^t f(s, y(s)) ds - x \int_0^1 dt \int_0^t f(s, y(s)) ds. \quad (24)$$

Дважды дифференцируя это равенство, получим:

$$y''(x) = f(x, y(x)). \quad (25)$$

Кроме того, из самого построения последовательности видно, что  $y(0) = y(1) = 0$  и что  $p(x) \geq y(x) \geq q(x)$  при  $0 \leq x \leq 1$ .

Разрешимость задачи (1) — (2) при условиях теоремы доказана. Кроме того, мы получили последовательность  $y_n(x)$ , которая равномерно сходится (сверху) к решению  $y(x)$ . Взяв за исходную функцию  $q(x)$ , а не  $p(x)$ , можно было бы аналогично построить последовательность  $z_n(x)$ , которая сходилась бы к решению задачи  $z(x)$  снизу. При этом вообще  $y(x) \geq z(x)$ . Если бы оказалось, что  $y(x) = z(x)$ , то в рассматриваемой области решение задачи было бы единственным. Вообще же единственность решения гарантировать нельзя.

Отметим в заключение, что, используя теорию функций действительного переменного, это доказательство можно было бы провести короче и при меньших ограничениях.

Замечание. При доказательстве существенную роль играл не конкретный вид левой части уравнения и краевых условий, а тот факт, что произведение функции Грина данной краевой задачи на правую часть уравнения, т. е.  $G(x, t)f(t, y)$ , есть функция, монотонно возрастающая по  $y$  при любых  $x, t$  в рассматриваемой области. В связи с этим доказанная теорема обобщается на целый класс краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков, а также для некоторых уравнений в частных производных эллиптического типа. Более того, теорема обобщается на интегральные уравнения вида

$$y(x) = \int_a^b K(x, t, y(t)) dt,$$

где функция  $K(x, t, y)$  монотонно возрастает (не убывает) по  $y$  при  $x, t, y$  из рассматриваемой области.

## «ПЛОСКОСТИ $n$ » КОСОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ТЕТРАЭДРЫ МЁБИУСА

З. А. Скопец

(Ярославль)

«Прямой  $n$ » для треугольника называется, как известно, такая прямая, которая проходит через вершину треугольника и делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные  $n$ -м степеням прилежащих сторон треугольника<sup>1)</sup>. Медиана треугольника, например, принадлежит «прямой 0», биссектриса угла треугольника — «прямой 1», симедиана — «прямой 2» и т. д.

Естественно возникает вопрос о перенесении этого понятия из плоскости в трехмерное пространство. С этой целью рассмотрим косою четырехугольник  $A_1A_2A_3A_4$  и плоскость  $\alpha_{34}$ , проходящую через сторону  $A_1A_2$ . Пусть эта плоскость пересекает противоположащую сторону  $A_3A_4$

в точке  $A_{34}$ , делящей ее в отношении  $\lambda = \overrightarrow{A_3A_{34}} : \overrightarrow{A_{34}A_4}$ . Если  $|\lambda| = a_{23}^n : a_{14}^n$ , где  $n$  — вещественное число и  $a_{23} = A_2A_3$ ,  $a_{14} = A_1A_4$ , то плоскость  $\alpha_{34}$  мы будем называть «плоскостью  $n$ » *косоугольника  $A_1A_2A_3A_4$  относительно стороны  $A_3A_4$* .

Необходимо обратить внимание на то, что при данном  $n$  у четырехугольника имеются две «плоскости  $n$ » относительно стороны  $A_3A_4$ , так как точка  $A_{34}$  может делить сторону  $A_3A_4$  в отношении  $\lambda$  внешним и внутренним образом. В первом случае  $\lambda < 0$ , во втором случае  $\lambda > 0$ . Соответствующие «плоскости  $n$ » мы будем обозначать  $\alpha'_{34}$  и  $\alpha_{34}$  и называть их *внешней* и *внутренней* «плоскостью  $n$ ». Таким образом, с каждым косым четырехугольником при данном  $n$  связаны восемь «плоскостей  $n$ », из которых четыре являются внутренними и четыре внешними. Эти плоскости определяют на сторонах косоугольника восемь точек, из которых четыре лежат на сторонах между точками  $A_i$  и  $A_k$ , а остальные четыре — на продолжениях сторон. Эти точки будем называть «точками  $n$ » и будем их соответственно обозначать через  $A_{ik}$  и  $A'_{ik}$ , причем плоскость  $\alpha_{ik}$  инцидентна с точкой  $A_{ik}$ , а плоскость  $\alpha'_{ik}$  — с точкой  $A'_{ik}$ .

<sup>1)</sup> См. С. И. Зетель, Новая геометрия треугольника, М., 1940, стр. 76.

Отметим, что из определения «плоскости  $\Pi$ » следует, что  $A_i A_k \dot{\sim} A_{ik} A'_{ik}{}^1$ ). Точно так же плоскости  $\alpha_{ii}$  и  $\alpha'_{ii}$  делят гармоническую пару плоскостей  $A_i A_k A_j$  и  $A_i A_k A_l$ , где индексы принимают различные значения от единицы до четырех.

1. Остановим внимание на «плоскости 0» и «плоскости 1». Очевидно, что в первом случае  $A_3 A_{34} = A_{34} A_4$ , т. е. точка  $A_{34}$  является серединой стороны  $A_3 A_4$ . Внешняя «плоскость 0»  $\alpha'_{34}$  параллельна стороне  $A_3 A_4$ , так как при  $\lambda = -1$  точка  $A'_{34}$  является несобственной.

Большой интерес представляют «плоскости 1». Опустим на «плоскость 1»  $\alpha_{34}$  из точек  $A_3$  и  $A_4$  перпендикуляры  $A_3 A'_3$  и  $A_4 A'_4$  (рис. 1). Точки  $A'_3$ ,  $A'_4$ ,  $A_{34}$  лежат на одной прямой, так как они принадлежат одновременно плоскости  $\alpha_{34}$  и плоскости, проходящей через прямую  $A_3 A_4$  перпендикулярно к  $\alpha_{34}$ . Следовательно, треугольники  $A_3 A'_3 A_{34}$  и  $A_4 A'_4 A_{34}$  подобны и поэтому  $A_3 A_{34} : A'_3 A_{34} = A_4 A_{34} : A'_4 A_{34} = A_3 A'_3 : A_4 A'_4$ . С другой стороны,  $A_3 A_{34} : A_4 A_{34} = A_2 A_3 : A_1 A_4$ , ибо  $\alpha_{34}$  является «плоскостью 1». Таким образом получаем  $A_3 A'_3 : A_4 A'_4 = A_2 A_3 : A_1 A_4$ . Последняя пропорция указывает на то, что треугольники  $A_2 A_3 A'_3$  и  $A_1 A_4 A'_4$  подобны и стороны  $A_2 A_3$  и  $A_1 A_4$  поэтому одинаково наклонены к «плоскости 1»  $\alpha_{34}$ .

Аналогичным образом убеждаемся, что внешняя «плоскость 1»  $\alpha'_{34}$  образует со сторонами  $A_2 A_3$  и  $A_1 A_4$  равные углы. В первом случае эти стороны лежат с разных сторон от плоскости  $\alpha_{34}$ , во втором — с одной стороны от  $\alpha'_{34}$ .

Читатель без труда докажет обратное предложение, а именно, что если плоскость, проходящая через сторону косоугольного четырехугольника, образует с прилежащими сторонами равные углы, то плоскость является «плоскостью 1», притом внутренней или внешней в зависимости от расположения этих сторон по отношению к плоскости.

**Теорема 1.** Для того чтобы плоскость, проходящая через сторону косоугольного четырехугольника, образовала с его прилежащими сторонами равные углы, необходимо и достаточно, чтобы эта плоскость была «плоскостью 1».

Доказанная теорема позволяет установить одно геометрическое место. Пусть  $\alpha_{34}$  является «плоскостью 1» для косоугольного четырехугольника  $A_1 A_2 A_3 A_4$ . На сторонах  $A_1 A_4$  и  $A_2 A_3$  выберем произвольно по точке  $B_4$  и  $B_3$ . Очевидно, что плоскость  $\alpha_{34}$  является «плоскостью 1» и для косоугольного четырехугольника  $A_1 A_2 B_3 B_4$ .

<sup>1)</sup>  $\dot{\sim}$  — знак гармонического деления.

**Следствие 1.** Если три прямые, которым принадлежат стороны косоугольного четырехугольника, фиксированы, а четвертая сторона является переменной, то геометрическое место «точек 1» (внутренних и внешних) на переменной стороне есть пара плоскостей.

Из доказанной теоремы может быть выведено и другое замечательное следствие. Пусть в пространстве даны три попарно скрещивающиеся прямые  $a, b, c$ , не параллельные одной плоскости. Выясним, сколько можно провести плоскостей через прямую  $c$ , образующих с прямыми  $a$  и  $b$  равные углы. Через прямые  $a$  и  $b$  проведем две плоскости, параллельные прямой  $c$ . Эти две плоскости пересекутся по прямой  $c'$ , параллельной прямой  $c$  и пересекающей прямые  $a$  и  $b$ . Но через прямую  $c'$  проходят две плоскости, образующие с прямыми  $a$  и  $b$  равные углы. Следовательно, через прямую  $c$  также проходят две плоскости, которые с прямыми  $a$  и  $b$  образуют равные углы. Последние две плоскости параллельны соответствующим плоскостям, проходящим через прямую  $c'$ . Если бы через прямую  $c$  можно было провести еще одну плоскость, образующую с прямыми  $a$  и  $b$  равные углы, то и через прямую  $c'$  можно было бы провести такую же третью плоскость, что противоречит следствию 1.

**Следствие 2.** Если в пространстве даны три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости, то через каждую из них проходят по две плоскости, образующие с двумя другими прямыми равные углы.

Если прямые  $a, b, c$  параллельны одной плоскости, то решение поставленного выше вопроса будет иное<sup>1)</sup>.

Построение «плоскости 1» можно с легкостью осуществить так. Отложим на сторонах  $A_4A_1$  и  $A_3A_2$  от точек  $A_1$  и  $A_2$  равные отрезки  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  (рис. 2). Плоскость  $\alpha$ , проведенная через середину  $M$  отрезка  $B_1B_2$  и прямую  $A_1A_2$ , является «плоскостью 1» для данного косоугольного четырехугольника  $A_1A_2A_3A_4$ . Действительно, применим к косоугольному четырехугольнику  $B_1B_2A_3A_4$  и к плоскости  $\alpha$  теорему Менелая:

$$\frac{B_1M}{MB_2} \cdot \frac{B_2A_2}{A_2A_3} \cdot \frac{A_3A_{34}}{A_{34}A_4} \cdot \frac{A_4A_1}{A_1B_1} = 1,$$

где через  $A_{34}$  обозначена точка пересечения плоскости  $\alpha$  и прямой  $A_3A_4$ . Но  $B_1M = MB_2$ ,  $A_1B_1 = A_2B_2$ ; поэтому из последнего равенства следует:

$$A_3A_{34} : A_{34}A_4 = A_2A_3 : A_4A_1.$$

<sup>1)</sup> Предлагаем его читателю для самостоятельного рассмотрения.

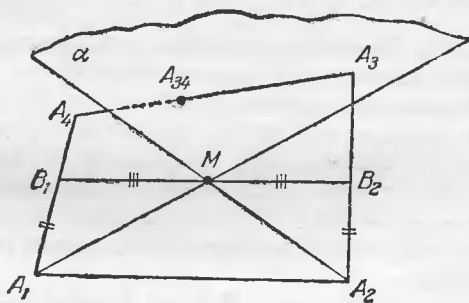


Рис. 2.

Это означает, что плоскость  $\alpha$  является «плоскостью 1». Если равные отрезки  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  отложены на сторонах или на продолжениях сторон косого четырехугольника, то плоскость  $\alpha$  будет внутренней «плоскостью 1», если же один отрезок отложен на одной стороне, а другой — на продолжении другой стороны, то плоскость  $\alpha$  будет внешней «плоскостью 1».

Таким образом, «плоскость 0» для косого четырехугольника  $A_1A_2B_2B_1$  относительно стороны  $B_1B_2$  является «плоскостью 1» для косого четырехугольника  $A_1A_2A_3A_4$  относительно стороны  $A_3A_4$ . Аналогичным образом можно доказать, что если  $A_1B_1 = A_3A_{34}$ ,  $A_2B_2 = A_{34}A_1$ , причем  $A_{34}$  является «точкой  $n$ » на стороне  $A_3A_4$ , то «плоскость 0» для косого четырехугольника  $A_1A_2B_2B_1$  будет «плоскостью  $n+1$ » для данного косого четырехугольника.

**Теорема 2.** Если на стороне  $A_3A_4$  косого четырехугольника  $A_1A_2A_3A_4$  дана «точка  $n$ »  $A_{34}$  и на сторонах  $A_1A_4$  и  $A_2A_3$  от точек  $A_1$  и  $A_2$  отложены соответственно отрезки  $A_1B_1 = A_3A_{34}$ ,  $A_2B_2 = A_{34}A_1$ , то «плоскость 0» для косого четырехугольника  $A_1A_2B_2B_1$  является «плоскостью  $n+1$ » для данного косого четырехугольника.

Эта теорема указывает на то, каким образом можно построить «плоскость  $n+1$ », если дана «плоскость  $n$ ».

2. Рассмотрим взаимное расположение четырех внутренних (внешних) «точек  $n$ » и соответствующих им четырех «плоскостей  $n$ ». Согласно определению имеем:

$$\frac{A_1A_{12}}{A_{12}A_2} = \frac{a_{14}^n}{a_{23}^n}, \quad \frac{A_2A_{23}}{A_{23}A_3} = \frac{a_{21}^n}{a_{34}^n}, \quad \frac{A_3A_{34}}{A_{34}A_4} = \frac{a_{32}^n}{a_{41}^n}, \quad \frac{A_4A_{41}}{A_{41}A_1} = \frac{a_{43}^n}{a_{12}^n},$$

где  $a_{ik} = A_iA_k$ .

Перемножив левые и правые части этих равенств, получим зависимость

$$\frac{A_1A_{12}}{A_{12}A_2} \cdot \frac{A_2A_{23}}{A_{23}A_3} \cdot \frac{A_3A_{34}}{A_{34}A_4} \cdot \frac{A_4A_{41}}{A_{41}A_1} = 1,$$

указывающую на принадлежность четырех точек  $A_{ik}$  одной плоскости, как это следует из теоремы, обратной упомянутой теореме Менелая. Аналогичным образом убеждаемся в том, что четыре внешние точки  $A'_{ik}$  принадлежат одной плоскости, а также две внешние и две внутренние «точки  $n$ » также принадлежат одной плоскости, если эти четыре точки принадлежат различным сторонам косого четырехугольника. Тем самым появляются восемь плоскостей, в каждой из которых расположены по четыре «точки  $n$ »:

$$\begin{aligned} \mu_1(A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41}), & \quad \mu_5(A'_{12}, A'_{23}, A'_{34}, A'_{41}), \\ \mu_2(A_{12}, A_{23}, A'_{34}, A'_{41}), & \quad \mu_6(A'_{12}, A_{23}, A'_{34}, A_{41}), \\ \mu_3(A_{12}, A'_{23}, A'_{34}, A_{41}), & \quad \mu_7(A'_{12}, A_{23}, A_{34}, A'_{41}), \\ \mu_4(A_{12}, A'_{23}, A_{34}, A'_{41}), & \quad \mu_8(A'_{12}, A'_{23}, A_{34}, A'_{41}). \end{aligned}$$

С другой стороны, из рассмотрения этих восьми плоскостей находим, что через каждую «точку  $n$ » проходят четыре плоскости  $\mu_i$ . Например, через точку  $A_{23}$  проходят плоскости  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_7$ . Таким образом, восемь «точек  $n$ » и восемь плоскостей  $\mu_i$  образуют конфигурацию  $(8_4)$ , двойственную самой себе<sup>1)</sup>.

Разобьем восемь «точек  $n$ » на две группы по четыре точки так, чтобы в одну группу были отнесены четыре точки, расположенные по одной на каждой стороне косого четырехугольника, и чтобы три из этих точек были внутренними, а четвертая — внешней. Во второй группе тем самым будут три внешние и одна внутренняя «точка  $n$ ». Такое разбиение можно осуществить, очевидно, четырьмя способами.

Для примера рассмотрим такие две четверки точек:  $T_1(A_{12}, A_{23}, A_{34}, A'_{41})$  и  $T_2(A'_{12}, A'_{23}, A'_{34}, A_{41})$ . Точки каждой четверки не принадлежат одной плоскости, так как произведение отношений, в которых эти точки делят стороны косого четырехугольника, равны по —1. Следовательно, эти четверки «точек  $n$ » являются вершинами двух тетраэдров  $T_1$  и  $T_2$ . Нетрудно заметить, что вершина  $A_{12}$  тетраэдра  $T_1$  принадлежит грани  $\mu_3$  тетраэдра  $T_2$ ; аналогично, вершина  $A_{23}$  — грани  $\mu_6$ , вершина  $A_{34}$  — грани  $\mu_5$ , вершина  $A'_{41}$  — грани  $\mu_8$ . Таким образом, тетраэдр  $T_1$  вписан в тетраэдр  $T_2$ . Точно так же убеждаемся в том, что тетраэдр  $T_2$  вписан в тетраэдр  $T_1$ . Такие два тетраэдра, из которых каждый вписан в другой, как известно, называются *тетраэдрами Мёбиуса*<sup>2)</sup>.

**Теорема 3.** *Восемь «точек  $n$ », соответствующих данному косому четырехугольнику, можно четырьмя способами разбить на две четверки точек, являющихся вершинами четырех пар тетраэдров Мёбиуса; при этом вершинами одного тетраэдра (из пары тетраэдров Мёбиуса) являются три внутренние и одна внешняя «точка  $n$ », принадлежащие различным сторонам косого четырехугольника.*

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что восемь «плоскостей  $n$ » определяют четыре пары тетраэдров Мёбиуса. На самом деле, из того, например, что четыре точки  $A_{12}, A_{23}, A'_{34}, A'_{41}$  принадлежат одной плоскости  $\mu_2$ , следует, что прямые  $A_{12}A'_{34}$  и  $A_{23}A'_{41}$  пересекаются в некоторой точке  $M_2$  (собственной или несобственной) (рис. 3). Но прямая  $A_{12}A'_{34}$  есть линия пересечения плоскостей  $\alpha_{12}$  и  $\alpha'_{34}$ , а прямая  $A_{23}A'_{41}$  — линия пересечения плоскостей  $\alpha_{23}$  и  $\alpha'_{41}$ , что указывает на принадлежность точки  $M_2$  четырем «плоскостям  $n$ »:  $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha'_{34}, \alpha'_{41}$ . Таким образом, в частности, два тетраэдра  $T_1(\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha'_{41})$ ,  $T_2(\alpha'_{12}, \alpha'_{23}, \alpha'_{34}, \alpha_{41})$  являются тетраэдрами Мёбиуса, вершины которых

<sup>1)</sup> См. Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, М.—Л., 1951, гл. III.

<sup>2)</sup> E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Leipzig — Wien, 1929, стр. 194.



$M_i$  принадлежат плоскостям  $\mu_i$ . Этими вершинами являются для  $T_1$ :  $M_1, M_2, M_4, M_7$ , а для  $T_2$ :  $M_3, M_5, M_6, M_8$ .

**Теорема 4.** *Восемь «плоскостей  $\mu$ » определяют четыре пары тетраэдров Мёбиуса. Тетраэдр одной пары определяется тремя внутренними и одной внешней «плоскостями  $\mu$ », соответствующими различным сторонам косого четырехугольника.*

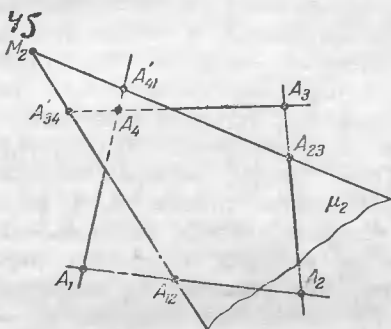


Рис. 3.

Восемь «плоскостей  $\mu$ » и восемь плоскостей  $\mu_i$  вместе с восемью «точками  $\mu$ » и восемью точками  $M_i$  определяют конфигурацию (16<sub>7</sub>).

Можно получить наглядную модель двух тетраэдров Мёбиуса, если обратиться к некоторым обобщениям предыдущих построений. Пусть на сторонах косого четырехугольника дано по точке  $A_{ik}$  так, что четыре точки  $A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41}$  принадлежат одной плоскости. Построим на каждой стороне четвертую гармоническую точку  $A'_{ik}$  к точке  $A_{ik}$  и вершинам  $A_i, A_k$ .

Согласно теореме Менелая, точки  $A'_{ik}$  также принадлежат одной плоскости. Более того, две точки  $A_{ik}$  и две точки  $A'_{ik}$ , принадлежащие различным сторонам, принадлежат одной плоскости  $\mu_i$ . Как легко проверить, полученные восемь точек  $A_{ik}$  и  $A'_{ik}$  и восемь плоскостей  $\mu_i$  определяют четыре пары тетраэдров Мёбиуса. Такое построение тетраэдров Мёбиуса уже является проективным и не нуждается в привлечении метрических понятий, хотя мы ими здесь пользовались. Это обстоятельство позволяет рассмотреть косые четырехугольники с несобственными вершинами, относительно которых тетраэдры Мёбиуса могут иметь специальное и удачное в наглядном отношении расположение.

Действительно, рассмотрим параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 4). Пусть диагонали  $AD_1$  и  $A_1 D$  пересекаются в точке  $M$ , а диагонали  $BC_1$  и  $B_1 C$  — в точке  $N$ . Эти четыре диагонали можно рассматривать как стороны косого четырехугольника с двумя собственными вершинами  $M$  и  $N$  и двумя несобственными вершинами, характеризующими направления параллельных диагоналей  $AD_1, BC_1$  и  $A_1 D, B_1 C$ . На сторонах этого косого четырехугольника расположены точки  $A, B, C, D$ , принадлежащие одной плоскости — грани параллелепипеда. Четвертые гармонические точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$ , очевидно, также принадлежат одной пло-

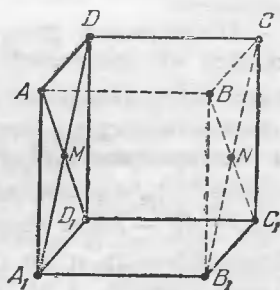


Рис. 4.

скости, и восемь вершин параллелепипеда являются вершинами четырех пар тетраэдров Мёбиуса. Например, вершины  $A, B, C, A_1$  не принадлежат одной плоскости, каждая из них принадлежит одной из сторон косого четырехугольника, поэтому эти вершины можно принять за вершины одного из двух тетраэдров Мёбиуса, а остальные вершины определяют второй из них. Таким образом, вершины параллелепипеда могут служить вершинами пары тетраэдров Мёбиуса. Грани этих тетраэдров являются две пары параллельных граней параллелепипеда и две пары его диагональных плоскостей.

Более детальное изучение тетраэдров Мёбиуса, вершины которых являются вершинами параллелепипеда, не является целью данной статьи. Изготовление наглядного пособия, на котором можно было бы разглядеть взаимное расположение двух тетраэдров, из которых один одновременно вписан и описан около другого, не представляет, очевидно, никакого труда, хотя незнание с упомянутым свойством параллелепипеда и вообще с существованием тетраэдров Мёбиуса может вызвать у читателя опасение, что такие тетраэдры вряд ли существуют. После сказанного, доказательство теоремы существования тетраэдров Мёбиуса вполне доступно всякому начинающему знакомиться с элементами стереометрии, и оно может быть проведено простым показом модели параллелепипеда, у которого вершины надлежащим образом разбиты на две группы по четыре.

---

## РЕШЕНИЕ ТРИНАДЦАТОЙ ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА

7 мая 1957 г. на заседании Московского математического общества студент третьего курса Московского университета **В. И. Арнольд** сделал доклад «О представлении функции трех переменных суперпозициями функций двух переменных». Этот доклад ознаменовал большую математическую победу — штурм так называемой **13-й проблемы Гильберта**, предпринятый в самые последние годы московскими математиками, увенчавшийся полной победой.

В 1900 г. на международном математическом конгрессе в Париже крупнейший математик того времени **Д. Гильберт** поставил 23 проблемы, которые, по его мнению, XIX век завещал XX. 13-я из этих проблем состояла в том, чтобы **выяснить возможность или невозможность выразить функцию трех переменных — корень уравнения седьмой степени**

$$x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$$

(зависящий, очевидно, от трех коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$ ) — суперпозициями непрерывных функций двух переменных, т. е. в виде непрерывной функции двух переменных  $u$  и  $v$ , где  $u$  и  $v$  снова являются функциями новых двух переменных и т. д., пока последними аргументами не явятся наши основные переменные  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

По-видимому, первые шаги на этом пути, заключением которого явился доклад **В. И. Арнольда**, сделал **А. Я. Дубовицкий**; внимание его на этот круг вопросов обратил его руководитель **П. С. Новиков**. Первые примеры **А. Я. Дубовицкого** и студента **МГУ Р. А. Миклоса**, (ученика **А. С. Кронрода**) носили еще очень частный характер; однако они послужили началом всему циклу работ, связанных с 13-й проблемой Гильберта.

**А. С. Крокрод**, работы которого по теории функций многих переменных имели много точек соприкосновения с 13-й проблемой Гильберта и сыграли существенную роль в ее решении, привлек к этому кругу вопросов еще одного своего ученика — студента **МГУ А. Г. Витушкина**. Последний, усовершенствовав несколько конструкции **Кронрода**, добился первых серьезных успехов в этом направлении. 30 марта 1954 г. он сделал на заседании Математического общества доклад «Решение некоторых задач, связанных с 13-й проблемой Гильберта», справедливо расцененный присутствующими как значительное продвижение этой проблемы. Докладчик показал, что существуют такие достаточно гладкие функции трех переменных, которые не представимы в виде никаких суперпозиций тоже

## О ШАРЕ, ВПИСАННОМ В ВЫПУКЛУЮ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНУЮ ПИРАМИДУ<sup>1)</sup>

И. Я. Такаатар

(Москва)

Вопрос о возможности вписать шар в выпуклую четырехугольную пирамиду до сих пор привлекает к себе внимание, о чем свидетельствует, например, статья В. Ф. Золотухина «Шар, вписанный в пирамиду»<sup>2)</sup>). Автор статьи, по-видимому, незнакомый с указанным в сноске<sup>1)</sup> сообщением, ограничивается выводом необходимого условия, оставляя в стороне вопрос о его достаточности.

Заметим предварительно, что если в выпуклый четырехгранный угол вписан шар, то четыре биссекторные плоскости его двугранных углов пересекаются по одной прямой. Действительно, центр вписанного шара должен быть равноудален от всех граней четырехгранного угла, а так как геометрическим местом точек, равноудаленных от граней двугранного угла, служит его биссекторная плоскость, то центр вписанного шара должен лежать в каждой из четырех биссекторных плоскостей двугранных углов четырехгранного угла. Следовательно, эти биссекторные плоскости необходимо должны пересекаться по одной прямой. Таким образом, геометрическим местом центров шаров, вписанных в четырехгранный угол, служит прямая пересечения биссекторных плоскостей его двугранных углов. Поэтому если в четырехгранный угол при вершине выпуклой четырехугольной пирамиды можно вписать шар, то и в пирамиду можно вписать шар, причем его центр в этом случае лежит в точке пересечения прямой, служащей геометрическим местом центров шаров, вписанных в четырехгранный угол при вершине пирамиды, с биссекторной плоскостью любого двугранного угла при основании пирамиды.

Задача сводится к вопросу о возможности вписать шар в выпуклый четырехгранный угол. Этот вопрос решается следующей теоремой:

*Теорема. Для того чтобы можно было вписать шар в выпуклый четырехгранный угол, необходимо и достаточно, чтобы сумма двух противоположных плоских углов при вершине четырехгранного угла была равна сумме двух других плоских углов при его вершине.*

<sup>1)</sup> Сообщено на заседании секции средней школы Московского математического общества в 1953 г.

<sup>2)</sup> В сборнике «Из опыта проведения внеклассной работы по математике в средней школе», М., Учпедгиз, 1956.

1. Доказательство необходимости. Пусть в выпуклый четырехгранный угол  $SABCD$  (рис. 1) вписан шар с центром в точке  $O$ .  $OM$  и  $ON$  — радиусы, проведенные в точки касания шара с гранями  $SAD$  и  $SDC$ . Тогда плоскость  $MONP \perp SD$ . Треугольники  $MSP$  и  $PSN$

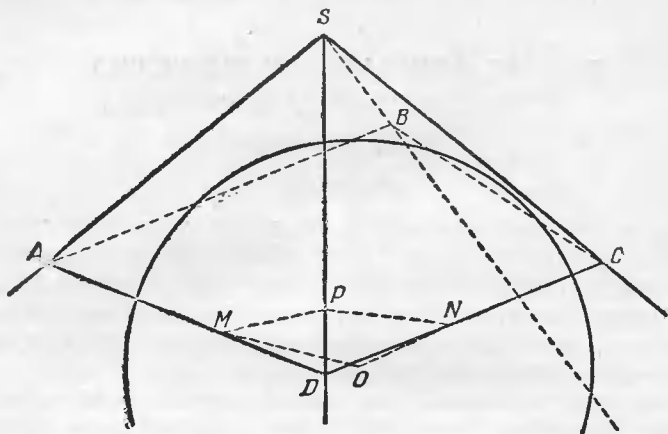


Рис. 1.

равны, поэтому  $\widehat{MSP} = \widehat{PSN}$ . Аналогично доказывается равенство остальных пар углов между касательными к шару, проведенными из вершины четырехгранного угла, и его ребрами, откуда получаем:

$$\widehat{ASD} + \widehat{BSC} = \widehat{ASB} + \widehat{DSC}, \text{ ч. т. д.}$$

II. Доказательство достаточности. Пусть в четырехгранном угле  $SABCD$  (рис. 2) имеет место соотношение

$$\widehat{ASB} + \widehat{DSC} = \widehat{ASD} + \widehat{BSC}.$$

При этом могут представиться два случая, от которых остальные отличаются лишь обозначениями:

1. Угол  $ASD$  равен углу  $DSC$ ; тогда, в силу условия, угол  $ASB$  должен быть равен углу  $BSC$ .

2. Угол  $ASD$  больше угла  $DSC$ .

Рассмотрим первый случай. Отложим от вершины четырехгранного угла  $S$  на его ребрах равные отрезки  $SQ, SM, SN$  и построим плоскость  $QMNP$ , пересекающую ребро  $SD$  в точке  $P$ . Очевидно, что  $\triangle QSP = \triangle PSN$  и  $\triangle QSM = \triangle MSN$ , поэтому четырехугольник  $QMNP$  — ромб (или ромб, если угол  $ASB$  равен углу  $DSC$ ). Биссекторные плоскости двугранных углов  $SB$  и  $SD$  совпадают с плоскостью  $MSP$ , а биссекторные плоскости двугранных углов  $SA$  и  $SC$  пересекаются по прямой, лежащей в плоскости  $MSP$ , т. е. все четыре

биссекторные плоскости двугранных углов четырехгранного угла пересекаются по одной прямой. Этим самым теорема в первом случае доказана.

Если угол  $ASD$  больше угла  $DSC$ , то можно построить в грани  $ASD$  угол  $KSD$ , равный углу  $DSC$ . В силу условия теоремы, угол  $ASB$  должен быть больше угла  $BSC$ , поэтому можно в плоскости грани  $ASB$  построить угол  $LSB$ , равный углу  $BSC$ , и тогда углы  $ASL$  и  $ASK$  должны быть равны.

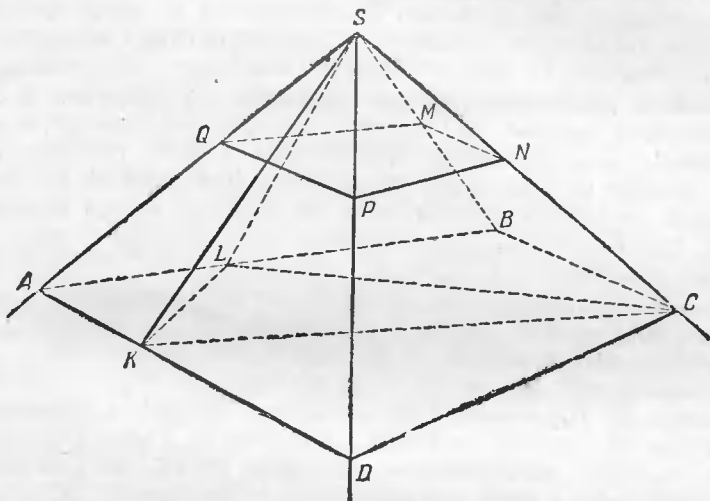


Рис. 2.

Известно, что если в трехгранном угле два плоских угла равны, то биссекторная плоскость двугранного угла, составленного равными плоскими углами, пересекает плоскость третьего плоского угла по его биссектрисе и перпендикулярна к плоскости этого угла. Будем считать, что отрезки  $SC$ ,  $SL$  и  $SK$  равны (они могут быть построены с соблюдением этого условия).

Тогда по отношению к треугольнику  $KLC$  биссекторные плоскости двугранных углов  $SA$ ,  $SB$  и  $SD$  оказываются плоскостями симметрии сторон треугольника.

Но три плоскости симметрии сторон треугольника пересекаются по одной прямой (эта прямая является геометрическим местом точек, равноудаленных от всех вершин треугольника). Таким образом, три биссекторные плоскости двугранных углов четырехгранного угла пересекаются по одной прямой, значит, и четвертая биссекторная плоскость пройдет через эту прямую, служащую геометрическим местом точек, равноудаленных от всех четырех граней. Этим самым теорема доказана.

гладких (хотя и имеющих меньше производных, чем исходная) функций двух переменных.

Результаты Витушкина заинтересовали акад. А. Н. Колмогорова. 27 апреля 1954 г. он выступил на Математическом обществе с докладом, в котором по-новому раскрыл смысл этих результатов. В 1955/56 учебном году А. Н. Колмогоров вел на II курсе МГУ научный кружок, посвященный вопросам, примыкающим к 13-й проблеме. О достигнутых на этом кружке успехах Колмогоров рассказал Математическому обществу в своем докладе 17 апреля 1956 г. Наиболее неожиданными оказались результаты самого руководителя кружка: А. Н. Колмогоров доказал, что каждую непрерывную функцию  $n$  переменных ( $n \geq 4$ ) можно представить в виде суперпозиций непрерывных функций трех переменных. При этом А. Н. Колмогоров на докладе заявил, что он считает весьма возможным, что Гильберт, предполагавший невозможным представления указанной им функции суперпозициями непрерывных функций двух переменных, не ошибся — функции любого числа переменных можно свести к функциям трех переменных, но последние уже несводимы к функциям двух переменных.

Однако, как оказалось, дело обстоит не так. Участник кружка А. Н. Колмогорова студент Арнольд, существенно опираясь на результаты своего руководителя, сумел показать, что каждая непрерывная функция трех переменных представима в виде суперпозиций непрерывных функций двух переменных. Это и явилось окончательным ответом на поставленный Гильбертом вопрос, причем впервые этот ответ оказался не подтверждающим, а опровергающим первоначальную гипотезу Гильберта.

В одном из ближайших выпусков «Математического просвещения» будет помещена статья В. И. Арнольда, более подробно освещающая круг вопросов, связанных с 13-й проблемой Гильберта. Редакция намерена также поместить полный перевод «Математических проблем» Гильберта.

### III. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ СООБЩЕНИЯ

(Опыт преподавания и педагогический эксперимент)

#### О РАВНОМЕРНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ

Н. Я. Виленкин

(Москва)

Хорошо известны трудности, возникающие при изложении теоремы о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке. При изложении этой теоремы либо приходится доказывать лемму Гейне — Бореля, представляющую известные трудности для студентов первого курса, либо вводить понятие функции, не являющейся равномерно непрерывной на заданном отрезке; определение этого понятия на « $\epsilon$  —  $\delta$ -языке» усваивается многими студентами лишь формально. Мы предлагаем в этой заметке доказательство упомянутой теоремы, основывающееся на теореме о вложенной системе отрезков. Следует отметить, что во многих институтах (например, на физических отделениях физико-математических факультетов педагогических институтов) теорема о вложенной системе отрезков принимается без доказательства и служит основой дальнейшего построения курса математического анализа. При таком изложении представляется выгодным использовать доказательства теорем, непосредственно опирающиеся на теорему о вложенной системе отрезков.

**Определение 1.** Пусть функция  $y=f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$  и пусть  $[c, d]$  — часть этого отрезка. Зададим число  $\epsilon > 0$ . Функция  $y=f(x)$  называется  $\epsilon$ -непрерывной на отрезке  $[c, d]$ , если существует такое число  $\delta > 0$ , что из неравенства  $|x_2 - x_1| < \delta$  и из того, что  $x_1$  является одной из точек отрезка  $[c, d]$ , а  $x_2$  — одной из точек отрезка  $[a, b]$ , вытекает неравенство  $|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$ .

**Определение 2.** Функция  $y=f(x)$  называется *равномерно непрерывной* на отрезке  $[a, b]$ , если она при любом  $\epsilon > 0$  является  $\epsilon$ -непрерывной на этом отрезке (в этом случае отрезки  $[a, b]$  и  $[c, d]$  совпадают).

**Лемма.** Если точка  $e$  лежит между точками  $c$  и  $d$  и если функция  $y=f(x)$  при данном  $\epsilon > 0$  является  $\epsilon$ -непрерывной на отрезках  $[c, e]$  и  $[e, d]$ , то она будет  $\epsilon$ -непрерывной и на отрезке  $[c, d]$ .



**Доказательство.** По условию теоремы существуют числа  $\delta_1 > 0$  и  $\delta_2 > 0$ , обладающие следующими свойствами: если  $|x_2 - x_1| < \delta_1$  и  $x_1$  — точка отрезка  $[c, e]$ , а  $x_2$  — точка отрезка  $[a, b]$ , то имеет место равенство  $|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$ ; аналогично, если  $|x_2 - x_1| < \delta_2$  и  $x_1$  — точка отрезка  $[e, d]$ , а  $x_2$  — точка отрезка  $[a, b]$ , то также имеет место равенство  $|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$ . Пусть  $\delta$  — наименьшее из чисел  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Пусть  $x_1$  — некоторая точка отрезка  $[c, d]$ ,  $x_2$  — точка отрезка  $[a, b]$  и  $|x_2 - x_1| < \delta$ . Так как  $x_1$  принадлежит либо отрезку  $[c, e]$ , либо отрезку  $[e, d]$  и  $|x_2 - x_1| < \delta_1$ ,  $|x_2 - x_1| < \delta_2$  то в силу условия леммы должно выполняться неравенство  $|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$  и потому функция  $y = f(x)$   $\epsilon$ -непрерывна на отрезке  $[c, d]$ . Лемма доказана.

**Теорема.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в каждой точке отрезка  $[a, b]$ , то она равномерно непрерывна на этом отрезке.

**Доказательство.** Пусть при некотором  $\epsilon > 0$  функция  $f(x)$  не является  $\epsilon$ -непрерывной на отрезке  $[a, b]$ . Разделим отрезок  $[a, b]$  пополам. Из леммы следует, что хотя бы на одной из половин отрезка функция  $f(x)$  не является  $\epsilon$ -непрерывной. Разделим эту половину снова пополам и т. д. Мы получаем систему вложенных отрезков, на каждом из которых функция  $f(x)$  не является  $\epsilon$ -непрерывной. По теореме о вложенной системе отрезков существует точка  $c$ , общая для всех этих отрезков  $[a_n, b_n]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . В этой точке  $c$  функция  $f(x)$  непрерывна. Поэтому найдется такая окрестность  $(c - \tau, c + \tau)$  точки  $c$ , что для всех точек  $x$  из этой окрестности выполняется неравенство  $|f(x) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2}$ . Начиная с некоторого номера  $N$ , отрезки  $[a_n, b_n]$

будут содержаться внутри окрестности  $(c - \frac{\tau}{2}, c + \frac{\tau}{2})$ . Положим  $\delta = \frac{\tau}{2}$ . Тогда, если  $n \geq N$ ,  $x_1$  — одна из точек отрезка  $[a_n, b_n]$  и  $|x_2 - x_1| < \delta$ , то точка  $x_2$  лежит в окрестности  $(c - \tau, c + \tau)$  точки  $c$ . Поэтому имеют место неравенства  $|f(x_2) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2}$ ,  $|f(x_1) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2}$ , из которых следует, что  $|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$ . Мы доказали, таким образом, что функция  $f(x)$  является  $\epsilon$ -непрерывной на отрезке  $[a_n, b_n]$ , что противоречит выбору этих отрезков. Полученное противоречие показывает, что функция  $y = f(x)$  является  $\epsilon$ -непрерывной на отрезке  $[a, b]$  при любом  $\epsilon > 0$  и потому она равномерно непрерывна. Теорема доказана.

# РАЗЛОЖЕНИЕ ПРАВИЛЬНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА ЭРМИТА

А. М. Лопшиц

(Москва)

Настоящая заметка имеет своей целью привлечь внимание к одному элементарному методу вычисления числителей «простейших» дробей, на которые может быть разложена произвольная правильная дробная рациональная функция. Этот метод отличен от обычно применяемого «метода неопределенных коэффициентов».

Полученные формулы используются далее для решения задачи интерполирования с кратными узлами, т. е. задачи построения целой рациональной функции, принимающей вместе со своими производными (до некоторого указанного порядка) заданные значения в указанных точках.

Предлагаемые схемы решения обеих указанных задач могут быть использованы для получения результатов на современных быстродействующих вычислительных машинах.

1. Если знаменатель  $Q(x)$  правильной рациональной дроби  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  имеет корень  $\alpha$  кратности  $k$ , то имеет место, как известно, тождество

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0}{(x-\alpha)^k} + \frac{a_1}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{k-1}}{x-\alpha} + \frac{P^*(x)}{Q_1(x)}, \quad (1)$$

в котором

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= (x-\alpha)^k Q_1(x), \\ Q_1(\alpha) &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и степень полинома  $P^*(x)$  меньше степени полинома  $Q_1(x)$ <sup>1)</sup>.

Мы покажем, что вычисление числителей  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  простейших дробей может быть выполнено следующим образом.

---

<sup>1)</sup> См., например, А. Я. Х и н ч и н, Краткий курс математического анализа, Москва, 1953, стр. 258. [См. также стр. 137 наст. сборника. *Прим. редакции*].

Разложим полиномы  $P(x)$  и  $Q_1(x)$  по степеням бинома  $(x-\alpha)$ ; пусть

$$P(x) \equiv p_0 + p_1(x-\alpha) + p_2(x-\alpha)^2 + \dots + p_{k-1}(x-\alpha)^{k-1} + (x-\alpha)^k \bar{P}_1(x),$$

$$Q(x) \equiv q_0 + q_1(x-\alpha) + q_2(x-\alpha)^2 + \dots + q_{k-1}(x-\alpha)^{k-1} + (x-\alpha)^k \bar{Q}_1(x)$$

и выполним последовательное («школьное») деление полинома

$$p(y) \equiv p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_{k-1} y^{k-1} \quad (3)$$

на полином

$$q(y) \equiv q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \dots + q_{k-1} y^{k-1}, \quad (3')$$

ограничиваясь вычислением только первых  $k$  коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  частного

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{k-1} y^{k-1}.$$

Они и будут искомыми числителями простейших дробей в формуле (1).

Для доказательства умножим тождество (1) почленно на  $Q(x)$ ; заменяя  $x-\alpha$  через  $y$ , получим (в силу (3) и (3'))

$$p(y) + \bar{p}(y) = [q(y) + \bar{q}(y)][a_0 + a_1 y + \dots + a_{k-1} y^{k-1}] + y^k p^*(y + \alpha),$$

где

$$\bar{p}(y) = p_k y^k + p_{k+1} y^{k+1} + \dots, \text{ а } \bar{q}(y) = q_k y^k + q_{k+1} y^{k+1} + \dots$$

Приравнявая коэффициенты при степенях  $y$  с одинаковыми показателями, получим:

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= q_0 a_0, \\ p_1 &= q_0 a_1 + q_1 a_0, \\ p_2 &= q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2 a_0, \\ &\dots \\ p_{k-1} &= q_0 a_{k-1} + q_1 a_{k-2} + q_2 a_{k-3} + \dots + q_{k-1} a_0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Решая эту (рекуррентную) систему линейных уравнений, определим последовательно искомые числители  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ . Легко убедиться, что они совпадают с коэффициентами полинома, возникающего в процессе «школьного» деления полинома  $p(y)$  на полином  $q(y)$ , ч.т.д.

Выполнив вычисление числителей  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  для каждого из корней полинома  $Q(x)$ , придем к искомому разложению:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum \left( \frac{a_0}{(x-\alpha)^k} + \frac{a_1}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{k-1}}{x-\alpha} \right); \quad (5)$$

суммирование в правой части нужно выполнить по всем различным между собой корням  $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$  полинома  $Q(x)$ , учитывая их кратности  $k, k', k'', \dots$ .

Пример. Пусть требуется разложить на простейшие дроби рациональную функцию

$$\frac{3x^2 - 5x + 2}{(x-1)^5 (x+1)^4 x^3}.$$

1°. Начнем с нахождения группы простейших дробей

$$\frac{a_0}{(x-1)^5} + \frac{a_1}{(x-1)^4} + \frac{a_2}{(x-1)^3} + \frac{a_3}{(x-1)^2} + \frac{a_4}{x-1},$$

соответствующих корню  $\alpha = 1$  знаменателя  $Q(x) = (x-1)^5(x+1)^4x^3$ .

а) Обозначив  $P(x)$  числитель дроби, получим:

$$P(1) = 0, \quad DP(1) = 1, \quad \frac{D^2P(1)}{2!} = 3$$

и, следовательно,

$$P_1(x) = y + 3y^2, \quad \text{где } y = x - 1. \quad [D^k P(x) = \frac{d^k}{dx^k} P(x)],$$

$$\text{б) } Q_1(x) = (x+1)^4 x^3,$$

$$Q_1(1) = 16, \quad DQ_1(1) = 80, \quad \frac{D^2Q_1(1)}{2!} = 168, \quad \frac{D^3Q_1(1)}{3!} = 192, \quad \frac{D^4Q_1(1)}{4!} = 129,$$

и, следовательно,

$$Q_1(x) = 16 + 80y + 168y^2 + 192y^3 + 129y^4 + \bar{q}(y).$$

$$\text{с) } y + 3y^2 \left| \begin{array}{l} 16 + 80y + 168y^2 + 192y^3 + 129y^4 \\ 0 + \frac{1}{16}y - \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{32}y^3 - \frac{23}{32}y^4 + \dots \end{array} \right.$$

Таким образом,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{16}, \quad a_2 = -\frac{1}{8}, \quad a_3 = -\frac{1}{32}, \quad a_4 = -\frac{23}{32}.$$

2°. Найдём теперь группу простейших дробей

$$\frac{a'_0}{(x+1)^4} + \frac{a'_1}{(x+1)^3} + \frac{a'_2}{(x+1)^2} + \frac{a'_3}{x+1},$$

соответствующих корню  $\alpha' = -1$  знаменателя  $Q(x)$ :

$$\text{а) } P(-1) = 10, \quad DP(-1) = 11, \quad \frac{D^2P(-1)}{2!} = 3$$

и, следовательно,

$$P_2(x) = 10 - 11y + 3y^2, \quad \text{где } y = x + 1.$$

$$\text{б) } Q_2(x) = (x-1)^5 x^3,$$

$$Q_2(-1) = 32, \quad DQ_2(-1) = -176, \quad \frac{D^2Q_2(-1)}{2!} = 416, \quad \frac{D^3Q_2(-1)}{3!} = -552$$

и, следовательно,

$$Q_2(x) = 32 - 176y + 416y^2 - 552y^3 + \bar{q}(y).$$

$$\text{с) } 10 - 11y + 3y^2 \left| \begin{array}{l} 32 - 176y + 416y^2 - 552y^3 \\ \frac{5}{16} + \frac{11}{8}y + \frac{115}{32}y^2 + \frac{233}{32}y^3 \end{array} \right.$$

Таким образом,

$$a'_0 = \frac{5}{16}, \quad a'_1 = \frac{11}{8}, \quad a'_2 = \frac{115}{32}, \quad a'_3 = \frac{233}{32}.$$

3°. Остается найти группу простейших дробей

$$\frac{a''_0}{x^3} + \frac{a''_1}{x^2} + \frac{a''_2}{x},$$

соответствующую корню  $\alpha'' = 0$  знаменателя  $Q(x)$ .

$$\text{а) } P(0) = 2, \quad DP(0) = -5, \quad \frac{D^2P(0)}{2!} = 3$$

и, следовательно,

$$P_3(x) = 2 - 5x + 3x^2.$$

$$\text{б) } Q_3(x) = (x-1)^5(x+1)^4;$$

$$Q_3(0) = -1, \quad DQ_3(0) = 1, \quad \frac{D^2Q_3(0)}{2!} = 4$$

и, следовательно,

$$Q_3(x) = -1 + x + 4x^2 + \bar{q}(x).$$

$$\text{с) } 2 - 5x + 3x^2 \left| \begin{array}{l} -1 + x + 4x^2 \\ \hline -2 + 3x - 8x^2 \end{array} \right.$$

Таким образом,

$$a''_0 = -2, \quad a''_1 = 3, \quad a''_2 = -8.$$

Посоветуем в заключение решить эту же задачу методом неопределенных коэффициентов — это даст возможность сделать сравнение обеих схем решения.

2. Числа  $p_i$  и  $q_i$  могут быть, очевидно, определены по формулам:

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \left\{ \frac{d^i}{dx^i} P(x) \right\}_{x=\alpha} \cdot \frac{1}{i!} \equiv D^i P(\alpha) \cdot \frac{1}{i!}, \\ q_i &= \left\{ \frac{d^i}{dx^i} Q_1(x) \right\}_{x=\alpha} \cdot \frac{1}{i!} \equiv D^i Q_1(\alpha) \cdot \frac{1}{i!} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

( $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ ).

Учитывая, что, в силу (2),

$$Q(x) = q_0(x-\alpha)^k + q_1(x-\alpha)^{k+1} + \dots,$$

можно числа  $q_i$  вычислять и по формулам:

$$q_i = \left\{ \frac{d^{k+i}}{dx^{k+i}} Q(x) \right\}_{x=\alpha} \frac{1}{(k+i)!} \equiv D^{k+i} Q(\alpha) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k-1). \quad (6')$$

Эти формулы более удобны, так как числа  $q_i$  приходится, как сказано, вычислять для каждого из корней полинома  $Q(x)$ <sup>1)</sup>.

Формулы (4) дают, таким образом, возможность выразить числители  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ , соответствующие корню  $\alpha$  кратности  $k$  полинома  $Q(x)$ , линейно через значения, которые принимает полином  $P(x)$  и его первые  $k-1$  производных в точке  $x=\alpha$ ; пусть

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= p_0 \mu_{00}, \\ a_1 &= p_0 \mu_{10} + p_1 \mu_{11}, \\ a_2 &= p_0 \mu_{20} + p_1 \mu_{21} + p_2 \mu_{22}, \\ &\dots \dots \dots \\ a_{k-1} &= p_0 \mu_{(k-1)0} + p_1 \mu_{(k-1)1} + p_2 \mu_{(k-1)2} + \dots + p_{k-1} \mu_{(k-1)(k-1)}; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

коэффициенты  $\mu_{ij}$  могут быть, очевидно, выражены через числа  $q_i$ ; так, например,

$$\left. \begin{aligned} \mu_{00} &= \frac{1}{q_0}, \\ \mu_{10} &= -\frac{q_1}{q_0^2}, \quad \mu_{11} = \mu_{00}, \\ \mu_{20} &= \frac{q_1^2 - q_0 q_2}{q_0^3}, \quad \mu_{21} = \mu_{10}, \quad \mu_{22} = \mu_{00}, \\ \mu_{30} &= \frac{q_1^3 - 2q_0 q_1 q_2 - q_3 q_0^2}{q_0^4}, \quad \mu_{31} = \mu_{20}, \quad \mu_{32} = \mu_{10}, \quad \mu_{33} = \mu_{00}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Общее выражение для  $\mu_{i0}$  через  $q_0, q_1, q_2, \dots, q_i$  будет указано ниже (см. п. 4); нетрудно убедиться, что  $\mu_{pq} = \mu_{(p-q)0}$ .

Значения коэффициентов  $\mu_{pq}$  определяются, таким образом, только через значения, которые принимают производные от полинома

$$Q(x) \equiv (x-\alpha)^k (x-\alpha')^{k'} (x-\alpha'')^{k''} \dots \quad (9)$$

в точке  $x=\alpha$ , т. е. только через числа  $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ , являющиеся различными корнями полинома  $Q(x)$ .

Подставляя теперь из (7) в (5), получим:

$$P(x) = Q(x) \sum \frac{p_0 \mu_{00}}{(x-\alpha)^k} + \frac{p_0 \mu_{10} + p_1 \mu_{11}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots \\ \dots + \frac{p_0 \mu_{(k-1)0} + \dots + p_{k-1} \mu_{(k-1)(k-1)}}{x-\alpha}. \quad (9')$$

Мы получили, таким образом, формулу, выражающую полином  $P(x)$ , степень которого меньше, чем  $k+k'+k''+\dots$ , через значе-

<sup>1)</sup> Если в формулы (4) подставить вместо  $p_i$  и  $q_i$  их выражения (6) и (6'), то получим формулы, приведенные в книге: Э. Че з а р о, Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ОНТИ, М.—Л., 1936, стр. 439.

ния, которые он и его производные принимают в заданных «узлах»  $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ , имеющих заданную кратность  $k, k', k'', \dots$ . Учитывая, наконец, что задача Эрмита имеет всегда решение, т. е. что существует (единственный) полином степени меньшей, чем  $(k + k' + k'' + \dots)$ , принимающий в заданных различных узлах

$$x = \alpha, x = \alpha', x = \alpha'', \dots$$

вместе со своими производными порядка меньшего, чем

$$k, k', k'', \dots,$$

соответственно, любые наперед заданные значения<sup>1)</sup>, приходим к выводу, что формула (9') дает явное решение задачи Эрмита; входящий в нее полином  $Q(x)$  определяется по заданным узлам  $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$  и их кратностям  $k_1, k'_1, k''_1, \dots$  формулой (9), а числа  $\mu_{pq}$  определяются по формулам (8).

3. Рассмотрим несколько примеров построения полинома Эрмита.

а) Все заданные узлы — первой кратности. В этом случае

$$Q(x) = (x - \alpha)(x - \alpha')(x - \alpha'') \dots, \quad (10)$$

$$k = k' = \dots = 1, \mu_{00} = \frac{1}{q_0} = \frac{1}{DQ(\alpha)}, p_0 = P(\alpha)$$

и, следовательно,

$$P(x) = Q(x) \sum \frac{P(\alpha)}{DQ(\alpha)(x - \alpha)},$$

т. е.

$$P(x) = Q(x) \left( \frac{1}{x - \alpha} \cdot \frac{P(\alpha)}{DQ(\alpha)} + \frac{1}{x - \alpha'} \cdot \frac{P(\alpha')}{DQ(\alpha')} + \dots \right) \quad (11)$$

(интерполяционная формула Лагранжа).

б) Все заданные узлы — второй кратности. В этом случае

$$Q(x) = (x - \alpha)^2 (x - \alpha')^2 (x - \alpha'')^2 \dots, \quad (12)$$

$$\mu_{11} = \mu_{00}, k = k' = k'' = \dots = 2;$$

$$\mu_{00} = \frac{1}{DQ(\alpha)}; \mu_{10} = -\frac{\frac{1}{2} D^2 Q(\alpha)}{(DQ(\alpha))^2}; p_0 = P(\alpha); p_1 = DP(\alpha).$$

<sup>1)</sup> Доказательство следует из рассуждений, приведенных, например, в книге: В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, М., 1954, гл. I, § 13. Оно непосредственно получается, если учесть, что система линейных уравнений, которую приходится решить для нахождения коэффициентов интерполяционного полинома Эрмита, имеет определитель (обобщенный определитель Вандермонда, построенный на узлах  $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ , имеющих кратность  $k, k', k'', \dots$ ), не равный нулю. Подробнее об этом см. в книге: А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, М., 1952, стр. 54.

Учитывая, что, в силу (10),

$$P(x) = Q(x) \sum \left\{ p_0 \left( \frac{\mu_{00}}{(x-a)^2} + \frac{\mu_{10}}{x-a} \right) + p_1 \frac{\mu_{00}}{x-a} \right\},$$

получим:

$$P(x) = Q(x) \sum \left\{ P(\alpha) \left( \frac{1}{DQ(\alpha)(x-\alpha)^2} + \frac{D^2Q(\alpha)}{2(DQ(\alpha))^2(x-\alpha)} \right) + \right. \\ \left. + DP(\alpha) \frac{1}{DQ(\alpha)(x-\alpha)} \right\}. \quad (13)$$

(Напомним, что суммирование ведется по всем заданным, различным между собой, значениям  $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ )

с) Все заданные узлы — третьей кратности. В этом случае

$$Q(x) = (x-\alpha)^3 (x-\alpha')^3 (x-\alpha'')^3 \dots, \quad (14)$$

$$k = k' = k'' = \dots = 3; \quad \mu_{00} = \frac{1}{3!} D^3 Q(\alpha); \quad \mu_{10} = -\frac{\frac{1}{4!} D^4 Q(\alpha)}{\left( \frac{1}{3!} D^3 Q(\alpha) \right)^2};$$

$$\mu_{20} = \frac{\left( \frac{1}{4!} D^4 Q(\alpha) \right)^2 - \left( \frac{1}{3!} D^3 Q(\alpha) \right) \left( \frac{1}{5!} D^5 Q(\alpha) \right)}{\left( \frac{1}{3!} D^3 Q(\alpha) \right)^3}.$$

Эти выражения нужно подставить в формулу

$$P(x) = Q(x) \sum \left\{ P(\alpha) \left( \frac{\mu_{00}}{(x-\alpha)^3} + \frac{\mu_{10}}{(x-\alpha)^2} + \frac{\mu_{20}}{x-\alpha} \right) + \right. \\ \left. + DP(\alpha) \left( \frac{\mu_{00}}{(x-\alpha)^3} + \frac{\mu_{10}}{x-\alpha} \right) + \frac{1}{2} D^2 P(\alpha) \frac{\mu_{00}}{x-\alpha} \right\}. \quad (15)$$

д) Узлы  $\alpha, \alpha', \alpha''$  имеют первую кратность, узлы  $\beta, \beta', \beta''$  имеют вторую кратность, узлы  $\gamma, \gamma', \gamma''$  имеют третью кратность. В этом случае

$$Q(x) = ((x-\alpha)(x-\alpha') \dots) ((x-\beta)(x-\beta') \dots)^2 ((x-\gamma)(x-\gamma') \dots)^3, \quad (16)$$

$$P(x) = Q(x) \left\{ \sum_{\alpha} P(\alpha) \frac{\mu_{00}}{x-\alpha} + \right. \\ \left. + \sum_{\beta} \left[ P(\beta) \left( \frac{\tilde{\mu}_{00}}{(x-\beta)^2} + \frac{\tilde{\mu}_{10}}{x-\beta} \right) + DP(\beta) \frac{\tilde{\mu}_{00}}{x-\beta} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{\gamma} P(\gamma) \left\{ \frac{\bar{\mu}_{00}}{(x-\gamma)^3} + \frac{\bar{\mu}_{10}}{(x-\gamma)^2} + \frac{\bar{\mu}_{20}}{x-\gamma} + \right. \right. \\ \left. \left. + DP(\gamma) \left( \frac{\bar{\mu}_{00}}{(x-\gamma)^3} + \frac{\bar{\mu}_{10}}{x-\gamma} \right) \right\} \right\}, \quad (17)$$



где сумма  $\sum_{\alpha}$  берется по всем узлам  $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ ,  $\sum_{\beta}$  — по всем узлам  $\beta, \beta', \beta'', \dots$ ,  $\sum_{\gamma}$  — по всем узлам  $\gamma, \gamma', \gamma'', \dots$  и коэффициенты  $\mu_0$  вычисляются по формулам (а),  $\tilde{\mu}_{00}, \tilde{\mu}_{10}$  — по (b) и  $\bar{\mu}_{00}, \bar{\mu}_{10}, \bar{\mu}_{20}$  — по (с).

4. Возвратимся в заключение к обещанному в п. 2 рассмотрению вопроса о вычислении коэффициентов  $\mu_{pq}$  в формулах (7), т. е. о формулах, для нахождения решений  $a_0, a_1, a_2, \dots$  системы линейных уравнений (4). Если ввести обозначения

$$\frac{p_i}{q_0} = s_i, \quad -\frac{q_i}{q_0} = \alpha_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

то система (4) примет вид:

$$\begin{aligned} a_0 &= s_0, & a_1 &= a_0 \alpha_1 + s_1, & a_2 &= a_0 \alpha_2 + a_1 \alpha_1 + s_2, \\ & & a_3 &= a_0 \alpha_3 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + s_3, \dots \end{aligned}$$

Решение этой рекуррентной системы уравнений может быть представлено формулой (на доказательстве ее мы здесь не будем останавливаться)

$$a_n = \varphi_n s_0 + \varphi_{n-1} s_1 + \varphi_{n-2} s_2 + \dots + \varphi_0 s_n, \quad (18)$$

в которой коэффициенты  $\varphi_i$  выражаются только через заданные числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  и могут быть определены по формулам:

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = \varphi_0 \alpha_1, \quad \varphi_2 = \varphi_0 \alpha_2 + \varphi_1 \alpha_1, \quad \varphi_3 = \varphi_0 \alpha_3 + \varphi_1 \alpha_2 + \varphi_2 \alpha_0, \dots \quad (19)$$

Они могут быть определены также и по формуле

$$\varphi_n = \sum \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_n^{k_n} \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \dots k_n!}, \quad (20)$$

в которой суммирование должно быть выполнено по всем неотрицательным целым числам  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , удовлетворяющим уравнению

$$1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + 3 \cdot k_3 + \dots + n \cdot k_n = n.$$

Вычисление коэффициентов  $\varphi_i$  по формулам (19) легко программировать на автоматических быстродействующих вычислительных машинах.

Отметим также, что функции  $\varphi_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , определяемые формулой (20), находят свое использование и при решении конечноразностных уравнений с постоянными коэффициентами (в тех случаях, когда целесообразно избежать нахождения корней характеристического уравнения), а также и в других вопросах<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См., например, А. М. Лопшиц, Формула, выражающая степень линейного преобразования через коэффициенты его характеристического уравнения, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. IX, 1952, стр. 5.

---

## IV. НАУЧНАЯ И ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ХРОНИКА

---

### ТРЕТИЙ ВСЕСОЮЗНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СЪЕЗД

*Н. М. Коробов*

(Москва)

С 25 июня по 4 июля 1956 г. в Москве в помещении Московского государственного университета проходили заседания Третьего Всесоюзного математического съезда. Съезд был созван по инициативе Академии наук и Министерства высшего образования СССР.

На съезде были представлены широкие круги научных работников: преподаватели высшей школы, научные сотрудники институтов, аспиранты, а также студенты старших курсов университетов.

Всего в работе съезда приняло участие более 2600 советских математиков, в том числе 63 академика и члена-корреспондента АН СССР, 292 профессора и доктора наук, 767 доцентов и кандидатов наук. В работе съезда приняли участие также 60 иностранных ученых из 16 стран: Англии, Болгарии, Венгрии, ГДР, Индии, Италии, Китая, Норвегии, Польши, Румынии, США, Франции, ФРГ, Чехословакии, Швеции и Югославии.

На съезде присутствовали математики более чем из 100 городов Советского Союза, в том числе из Москвы около 1000 человек, из Ленинграда 300 человек, из Киева, Харькова и Тбилиси более чем по 60 человек и т. д. В работе съезда приняли участие сотрудники академий союзных республик, представители 31 университета, 49 педагогических институтов, многих крупных технических вузов и научно-исследовательских институтов.

Съезд открыл академик И. М. Виноградов. В своем вступительном слове И. М. Виноградов отметил заботу о развитии науки, проявляемую Коммунистической партией и Советским правительством, указал особенности развития современной математики и приветствовал участников съезда и иностранных гостей.

Работа съезда проходила по следующим секциям, представляющим все основные математические направления, развивающиеся в Советском Союзе:

1) Теория чисел, 2) Алгебра, 3) Дифференциальные и интегральные уравнения, 4) Теория функций, 5) Функциональный анализ, 6) Теория вероятностей, 7) Топология, 8) Геометрия, 9) Математическая логика и

основания математики. 10) Математические проблемы механики, 11) Математические проблемы физики, 12) История математики.

На заседаниях секций было сделано свыше 700 докладов, в том числе 100 обзорных докладов, освещающих достижения и современное состояние всех разделов математики. Более 60 докладов было сделано иностранными учеными. Наибольшее число докладов (120) было поставлено на секции дифференциальных и интегральных уравнений. На секции теории функций было сделано более 100 докладов, на секции геометрии — более 90 докладов и т. д.

Резюме кратких сообщений и докладов и тезисы обзорных докладов были изданы в I и II томах «Трудов съезда»<sup>1)</sup>. На 1957 г. намечено издание третьего и четвертого томов трудов съезда, куда войдет полный текст обзорных докладов. Отдельной брошюрой издана программа работы съезда, содержащая перечень докладчиков и названия докладов.

Съезд продемонстрировал огромный размах и высокий уровень научно-исследовательской работы в Советском Союзе в области математики и ее приложений.

В работе съезда наряду с учеными старшего и среднего поколения приняло активное участие более полутора тысяч молодых математиков — младших научных сотрудников, аспирантов и студентов. Многие из сообщений, сделанных ими на съезде, представляют ценный вклад в математическую науку.

На съезде было поставлено значительное число совместных докладов, объединявших несколько секций. Эти доклады явились отражением одной из особенностей современной математики, состоящей в том, что наряду с развитием и углублением работы в классических областях математики и с возникновением новых направлений происходит проникновение методов одних областей в другие, что часто приводит к решению важнейших проблем.

В заключительном слове на последнем пленарном заседании съезда академик И. М. Виноградов, подводя итоги работы съезда, отметил, что в настоящее время почти не остается областей математики, которые не нашли бы прямого или косвенного выхода в практику, и указал на необходимость всемерного развития всех математических направлений.

На заключительном заседании съезда было принято решение о созыве следующего четвертого Всесоюзного математического съезда в 1960 г. и о целесообразности создания Всесоюзной математической ассоциации.

<sup>1)</sup> Труды III Всесоюзного математического съезда, т. I — II, М., 1956.

## КАЗАНСКОЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

*А. П. Норден*

(Казань)

В 1884 г. в Казанском обществе естествоиспытателей была организована физико-математическая секция, которая была реорганизована в самостоятельное Физико-математическое общество в 1890 г.

С самого начала своего существования Общество ставило своей целью способствовать научной работе своих членов путем постановки и обсуждения их научных сообщений, публикации полученных ими результатов, а также популяризации вопросов математики, физики, механики и астрономии путем организации публичных лекций.

Популярность Общества среди научных работников, студентов и преподавателей средней школы быстро росла. Число его членов вскоре достигло 300 человек; среди них было много иногородних и около 30 иностранных ученых.

Росту популярности Общества сильно содействовал выпуск печатного органа «Известий КФМО», которые только с 1884 по 1917 г. вышли в количестве 26 томов в среднем по 10 листов каждый. Кроме отчетов о работе Общества и статей обычного журнального типа, Известия КФМО публиковали в виде приложений и крупные монографии русских и зарубежных ученых. Так были опубликованы работы Ф. М. Суворова по римановой геометрии, работы А. П. Котельникова по теории винтов и векторов проективного пространства, работы одного из основоположников математической логики П. С. Порецкого и др. Из работ иностранных геометров Гаусса, Бельтрами, Лп, Гельмгольца, Клейна, Пуанкаре, опубликованных в Известиях КФМО, был впоследствии составлен известный сборник статей по основаниям геометрии, выпущенный в 1893 г.

Особое значение в дореволюционный период развития Общества имело, организованное им совместно с Казанским университетом, празднование столетнего юбилея со дня рождения Н. И. Лобачевского, состоявшееся в Казани в 1893 г.

Готовясь к этому торжеству, Общество провело широкую подписку и на средства, собранные по этой подписке, в Казани по проекту скульптора М. Л. Диллон был открыт памятник великому русскому геометру. Кроме того, на те же средства был организован между-

народный конкурс на премию имени Н. И. Лобачевского, которая должна была присуждаться каждые три года за лучшую работу по неевклидовой геометрии. Авторы лучших рецензий работ, представленных на конкурс, получали также золотую медаль с изображением Лобачевского.

С 1897 по 1912 г. было произведено шесть присуждений этой премии. В соискании премии и рецензировании поданных работ участвовали крупнейшие представители зарубежной и русской математической мысли: Ли, Гильберт, Ф. Шур, Киллинг, Пуанкаре, Клейн, Чезаро, Пеано, Пиери, Ковалевский, Энгель, Млодзеевский и др. Премии были присуждены С. Ли за работы по теории групп (1897), Гильберту за работы по основаниям геометрии (1904), Киллингу и Шуру (1900 и 1912) за работы по неевклидовой геометрии и т. д.

В организации и проведении конкурсов большую роль играла инициатива первого председателя Общества профессора Александра Васильевича Васильева.

С момента своего возникновения Общество заботилось о создании своей библиотеки, которая достигла значительного по тому времени размера — в 10 000 томов. Эта библиотека составлялась главным образом путем обмена и пополнялась частными пожертвованиями. Особенно ценной была библиотека, завещанная Обществу Г. Семиколоновым. Инженер путей сообщения по профессии и страстный почитатель Лобачевского, он всю жизнь собирал книги по геометрии и в особенности по неевклидовой геометрии и приобрел значительное число редких и редчайших изданий: первые печатные издания Евклида и его комментаторов, первое издание «Тентамена» Ф. Боляи, «Геометрических исследований» Лобачевского и др. После революции библиотека Общества вошла в фонды геометрического кабинета Казанского университета.

Деятельность Общества, прерванная гражданской войной, возобновляется в 1923 г. под председательством профессора Н. Н. Парфентьева. Возобновляется выход «Известий». В 1926 г. Общество празднует столетие открытия неевклидовой геометрии. Эта дата отмечается торжественным заседанием и научной конференцией, труды которой были изданы в виде двух сборников: «Столетняя годовщина неевклидовой геометрии Лобачевского» и «In memoriam Lobatschefski». Возобновилось и присуждение премии имени Лобачевского, которое состоялось в 1927 и 1936 гг. В качестве соискателей и рецензентов в конкурсе приняли участие Г. Вейль, Кёбе, Ковалевский, Шиллинг, Схоутен, Стройк, Э. Картан, Варичак, В. В. Вагнер, П. А. Широков, А. П. Котельников, В. Ф. Каган. Премии были присуждены Г. Вейлю (1927), Э. Картану (1936), первому за работы по геометрии и теории групп. За его работы по геометрии неголомомных пространств был удостоен премии и молодой советский ученый В. В. Вагнер, ныне профессор Саратовского университета.

В настоящее время Общество насчитывает около 100 членов, из них около 20 иногородних. Подавляющее их большинство — работники

высшей школы и научных учреждений. Общество собирается еженедельно, заслушивая доклады и сообщения своих членов и гостей. Чтобы охарактеризовать тематику работы ученых, группирующихся вокруг Общества, приведем некоторые данные, относящиеся к последнему пятилетию. За это время было заслушано около 170 докладов и сообщений, из которых около 130 содержали изложение оригинальных результатов авторов, а остальные носили обзорный или реферативный характер. По тематике доклады можно разделить на следующие группы: анализ — 20, геометрия — 21, дифференциальные и интегральные уравнения — 19, краевые задачи — 17, подземная гидромеханика — 15, алгебра и теория чисел — 15, механика и аэродинамика — 9, численные методы — 11, история науки — 18, физика и астрономия — 7 докладов.

Ряд заседаний был посвящен юбилейным датам и памяти выдающихся математиков и механиков: Н. И. Лобачевского, Гаусса, М. В. Остроградского, С. А. Чаплыгина, Н. Г. Чеботарева, П. А. Широкова, И. С. Громеки, В. Г. Имшенецкого, А. М. Можайского, В. В. Степанова и др.

В феврале 1951 г. была проведена конференция, посвященная 125-летию со дня открытия неевклидовой геометрии, в которой приняли участие ученые Москвы, Баку, Ярославля, Воронежа и других городов Советского Союза. Труды конференции были изданы в виде сборника «125 лет открытия неевклидовой геометрии Лобачевского» (ГТТИ, 1952).

Общество принимало активное участие в праздновании 150-летнего юбилея Казанского университета в 1953 г. и отметило столетнюю годовщину со дня смерти Н. И. Лобачевского в 1956 г.

Общество систематически проводило обсуждение словников и рукописей статей БСЭ, а также других изданий и издательских планов.

Ежегодно оно принимает участие в организации и проведении математических и физических школьных олимпиад и обсуждает их итоги.

Очередными задачами Общества является распространение своей деятельности на круги преподавателей средней школы и возобновление издания «Известий».

Нужно также добиваться возобновления проведения международного конкурса имени Лобачевского, который служил мощным средством популяризации нашей науки и установления международных контактов.

---

## ГДЕ ЛОГИЧЕСКАЯ ОШИБКА?

В журнале *The Amer. math. Monthly* была помещена задача, которая в вольном переводе звучит так: «из какой точки земного шара надо выйти, чтобы, пройдя 10 км по меридиану к югу, затем 10 км по параллели к востоку, наконец, снова 10 км по меридиану к северу, прийти в точку отправления?»

Одно решение почти очевидно: выйти из северного полюса. Любопытно, что это решение не единственное. Один видный математик вслух решал эту задачу так. Первая и третья части пути проходят по меридианам; но два меридиана имеют только две общие точки — полюсы северный и южный; последний отпадает, так как из него нельзя двигаться на юг; остается северный полюс в качестве единственного решения.

В чем ошибка рассуждения и как получить полное решение?

## А. К. ВЛАСОВ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Выдающийся русский геометр и педагог А. К. Власов, изложив на очередной лекции по аналитической геометрии задачу о пересечении двух прямых, заданных своими уравнениями, добавил:

«Два студента, впервые ознакомившиеся с этим вопросом, беседовали между собою.

Один сказал: „Теперь я понял, почему система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеет в общем случае одно решение. Это потому, что две линии пересекаются в одной точке“.

Другой ответил: „Вот когда я, наконец, понял, почему две прямые пересекаются в одной точке! Это потому, что система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеет одно решение“».

Из воспоминаний Н. А. Глаголева

## ОБЪЕДИНЕННЫЙ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР КАФЕДР ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ МОСКОВСКИХ ВТУЗОВ

*Л. Я. Цлаф*

(Москва)

Более трех лет в Москве работает объединенный научно-методический семинар кафедр высшей математики втузов Москвы. В нем принимают участие преподаватели более 20 втузов<sup>1)</sup>. Содержанием работы семинара является обсуждение основных вопросов преподавания высшей математики во втузах, обмен опытом преподавания высшей математики, изучение постановки преподавания высшей математики за рубежом, обсуждение учебников и т. п.

Для планирования работы семинара было создано бюро, в состав которого были избраны: организатор и руководитель семинара А. Ф. Бермант (МИСИ), П. А. Безсонов (МИХМ), В. П. Минорский (МИИТ), Л. Н. Соловьева (МИСИ) и Л. Я. Цлаф (МВМИ).

Заседания семинара проводятся каждый месяц. Они проходят при высокой активности участников, число которых на отдельных заседаниях доходило до 70. Перечислим некоторые из вопросов, рассмотренных на первых 28 заседаниях семинара (в скобках указаны фамилии докладчиков):

- 1) О различных выводах формулы Тейлора (*М. М. Постников*).
- 2) Содержание и место аналитической геометрии и векторного анализа в общем курсе математики во втузе (*Н. Я. Виленкин, Н. Н. Гольдбурт, Е. Н. Мирославлев*).
- 3) Кубатурные формулы и их применение (*Л. А. Люстерник*).
- 4) Вопросы алгебры во втузовском курсе математики (*А. И. Узков*).
- 5) Оценка погрешности формулы Симпсона (*В. П. Минорский*).

---

<sup>1)</sup> Московские институты: инженерно-строительный, полиграфический, автомеханический, авиационный, горный, вечерний машиностроительный, транспортно-экономический, станко-инструментальный, автотракторный, автодорожный, химического машиностроения, технологии легкой промышленности, инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии, инженеров электросвязи, инженеров транспорта; московское высшее техническое училище; заочные институты: энергетический, политехнический, сельскохозяйственный, инженеров транспорта; академии: химической защиты, бронетанковых войск, инженерная.



- 6) Некоторые приближенные формулы (*И. Я. Штаерман*).
- 7) Формулы Лагранжа и Коши, их геометрический и механический смысл (*В. П. Минорский*).
- 8) О преподавании дифференциальных уравнений во втузах (*И. А. Брин*).
- 9) Задачи о цепной линии (*С. И. Зетель*).
- 10) Обсуждение программ по математике для втузов (*П. А. Безсонов*).
- 11) О преподавании понятия непрерывности во втузах (*А. Н. Черкасов*).
- 12) О некоторых приближенных формулах (*И. Г. Араманович*).
- 13) Учебные планы и программы втузов Чехословакии и Югославии (*Е. Н. Мирославлев*).
- 14) О преподавании теории вероятностей во втузах (*Р. С. Гутер и Б. В. Овчинский*).
- 15) О преподавании дополнительных глав математики во втузах (*А. Ф. Бермант*).
- 16) О формулах приближенного интегрирования (*И. Я. Штаерман*).
- 17) Методика изложения интегрирования линейных дифференциальных уравнений с правой частью (*С. И. Зетель*).
- 18) Формулы Чебышева и Гюйгенса для спрямления дуг (студентка МИСИ *Н. Киль*).
- 19) Об изложении линейных дифференциальных уравнений (*Ю. С. Очан*).
- 20) Втузы Чехословакии и других стран народной демократии (*А. А. Арзамасцев*).
- 21) О кибернетике (*И. Я. Акушский, Э. Э. Кольман*).
- 22) Об учебнике Н. Н. Лузина «Дифференциальное и интегральное исчисление» (*Е. Б. Ваховский, В. П. Минорский, Л. Я. Цлаф*).
- 23) Об эффективных решениях некоторых линейных дифференциальных уравнений второго порядка (*М. И. Сканава*).
- 24) Простой вывод формулы Ю. С. Очана (*Н. И. Вайсфельд*).
- 25) Некоторые вопросы преподавания математики во втузах (*Л. Д. Кудрявцев*).
- 26) Преподавание темы «Кривые второго порядка» (*И. Н. Бронштейн*).
- 27) Об изложении понятия направленного отрезка в аналитической геометрии (*Н. И. Вайсфельд*).
- 28) Условия приема в вузы и постановка преподавания математики во Франции по данным 1956 г. (*П. А. Безсонов*).
- 29) Новые польские учебники по высшей математике (*Л. Я. Цлаф*).
- 30) Программы и учебники по математике в средней школе в свете требований втузов (*А. Ф. Бермант, В. М. Шепелев, В. Б. Гуревич, В. В. Зорин*).
- 31) Об издании математической литературы в 1957 г. и о перспективах его развития (*Г. Ф. Рыбкин, А. Г. Курош*).
- 32) Изложение вопроса о кратных интегралах (*Ю. С. Очан*).
- 33) Об изложении векторной алгебры (*М. Ф. Бокштейн*).
- 34) О некоторых назревших вопросах преподавания курса высшей математики во втузах в связи с инструктивным письмом № И-100 Министерства высшего образования (*П. А. Безсонов*).
- 35) Об изложении элементов теории корреляции (*Э. С. Маркович*).
- 36) Замечания к изложению вопроса о замене переменных в неопределенном и определенном интегралах (*А. М. Фомин*).

Ряд тем, поднятых и обсужденных на семинаре, относился к общим вопросам постановки преподавания высшей математики во втузах и в средней школе. Таков, например, вопрос о программах по курсу высшей математики. Методическое управление Министерства высшего образования согласилось с наличием недостатков в действующих программах и поручило семинару подготовить проект программы для машиностроительных специальностей.

По вопросу о программах и учебниках по математике для средней школы была принята резолюция, текст которой помещен на стр. 204 — 209 настоящего выпуска «Математического просвещения».

В декабре 1956 г. на совместном заседании семинара и Секции втузов Московского математического общества было решено объединить эти организации под названием «Объединенный научно-методический семинар кафедр высшей математики втузов г. Москвы Московского математического общества». 13 февраля 1957 г. было избрано новое бюро семинара в составе А. Ф. Берманта (МИСИ), П. А. Безсонова (МИХМ), Н. В. Ефимова (МГУ и ЛХИ), А. Н. Калашникова (МВТУ), В. М. Минорского (МИИТ), Л. Н. Соловьева (МИСИ) и Л. Я. Цлафа (МВМИ). На первом заседании бюро председателем семинара был избран А. Ф. Бермант, а заместителями председателя — Н. В. Ефимов и П. А. Безсонов.

В дальнейшем заседания семинара будут происходить по вторым средам каждого месяца<sup>1)</sup>. Бюро семинара рассчитывает, что к участию в его работе присоединятся преподаватели московских втузов, которые еще не включились в нее.

Новое бюро семинара разработало программу его работы. На заседании семинара было решено — разослать эту программу кафедрам математики всех московских втузов для отзыва, изменений и дополнений. После получения этих материалов от кафедр программа будет вновь рассмотрена семинаром.

Ниже приводится текст этой программы.

#### ПРОГРАММА РАБОТ СЕМИНАРА

##### А. Научно-методические темы по конкретным вопросам преподавания

1. Понятие интеграла, обыкновенного и многомерного.
2. Применения интеграла, измерение величин. Аддитивные функции областей.
3. Функции многих переменных.
4. Задачи Коши и краевые задачи в теории дифференциальных уравнений.
5. Задачи на составление дифференциальных уравнений.
6. Вопросы вычислительного практикума, теории приближенных методов (табулирование, интерполяция, эмпирические формулы и т. п.).
7. Класс элементарных функций. Понятие обратной функции.
8. Элементы теории вероятностей и статистики.
9. Варианты сокращенного изложения аналитической геометрии.
10. Основные начальные понятия анализа.

##### Б. Научные и историко-методические темы

1. Теория информации и игр.
2. Различные аспекты развития операционного исчисления.
3. Основные проблемы и направления в современной философии математики.
4. Требования к математической подготовке инженеров со стороны современной технической науки.

<sup>1)</sup> В помещении Московского инженерно-строительного института им. В. В. Куйбышева (Москва, Разгуляй) в 18 часов.

5. Опыт педагогической характеристики Остроградского, Летникова, Шереметьевского, Поссе, Власова, Дедекинда, Пуассона, Монжа, Ламе, Грина, Стокса.
6. Соотношения последовательно-логических (дедуктивных), интуитивных и справочных (догматических) элементов во втузовском курсе математики.
7. История развития учебной литературы по высшей математике для вузов.

#### В. Учебно-методические и организационные вопросы

1. Основные программы.
2. Варианты дополняющих программ по важнейшим профилям втузов.
3. Учебные планы по математике (распределение часов по семестрам и по видам занятий), экзамены и зачеты.
4. Проблемы самостоятельной работы студентов. Домашние задания.
5. Объем и характер требований к знаниям студентов.
6. Проблемы использования математических знаний и закрепления их в преподавании обще-технических и специальных дисциплин.
7. Опыт организации и работы студенческих кружков по математике. Олимпиады, конкурсы.
8. Курсы математики (программы, методика, дидактика) для втузов без отрыва от производства (заочных и вечерних).
9. Организация, учебные планы и программы по математике для аспирантов-инженеров.
10. Организация и характер вступительных испытаний по математике во втузы.
11. Требования со стороны втузов к средней школе по подготовке выпускников по математике.

#### Г. Критико-библиографические темы

1. Математический материал в учебных книгах по общетехническим и специальным дисциплинам.
2. Специализированная математическая литература.
3. Курсы анализа.
4. Курсы аналитической геометрии.
5. Учебные книги по специальным и дополнительным главам

#### Д. Постановка преподавания математики во втузах за рубежом

1. Бельгия, Германия (ГДР, ФРГ), Англия, США.
2. Учебные материалы зарубежных втузов (задачи, темы, учебная литература).

## ХІХ ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА В МОСКВЕ

*Е. Б. Дынкин и И. В. Гирсанов*

(Москва)

Механико-математический факультет МГУ, Московское математическое общество и Мосгоронто ежегодно проводят математические олимпиады московских школьников (от VII до X класса). В апреле 1956 г. состоялась XIX олимпиада.

В течение всего 1955/56 учебного года при Московском университете работал школьный математический кружок, организованный более 20 лет назад. По воскресеньям (раз в две недели) профессора и доценты МГУ и других высших учебных заведений читали для школьников лекции по математике. Приводим список лекций с указанием лекторов.

Для школьников IX—X классов:

1. «Слова „все“ и „существует“ в математических определениях и предложениях» (С. А. Яновская).
2. «Математический анализ» (И. Р. Шафаревич).
3. «Координаты» (А. И. Маркушевич).
4. «Разные бесконечности» (Г. Е. Шилов).
5. «Площади ориентированных фигур и теория палиметров» (А. М. Лопицкий).
6. «Вычисления на электронных вычислительных машинах» (А. Л. Брудно).
7. «Основные понятия теории информации» (И. М. Яглом).
8. «Теорема о неподвижной точке» (Г. Л. Лунц).
9. «Что такое кибернетика» (А. А. Липунов).

Для школьников VII—VIII классов:

1. «Методы суммирования рядов» (Г. Ц. Тумаркин).
2. «О геометрических построениях, выполняемых одним циркулем» (В. А. Тонян).
3. «Электронные вычислительные машины» (М. А. Карцев).
4. «Симметрии и движения на плоскости» (Е. А. Морозова).
5. «Решение математических задач методами механики» (В. А. Успенский).
6. «Векторы и их применение в элементарной геометрии» (С. Я. Хавинсон).
7. «Конфигурационные теоремы и задачи на построение» (Л. А. Скорняков).
8. Геометрический смысл алгебраических равенств и неравенств первой степени» (С. Я. Хавинсон).

Каждую неделю по вечерам собирались секции школьного математического кружка, работавшие под руководством студентов и аспирантов механико-математического факультета. Если в прежние годы секции

носили специализированный характер (алгебра, геометрия, теория чисел и т. п.), то теперь все они занимаются разнообразными вопросами из разных областей математики. Всего работало 13 секций: пять секций для X классов, четыре — для IX, три — для VIII и одна для VII. Общее число студентов и аспирантов, принимавших участие в руководстве секциями, 46 человек, из них 10 с I курса, 15 со II, восемь с III, восемь с IV, три с V и два аспиранта. Старшими руководителями секций были студенты Арнольд и Кириллов (II курс), Вентцель, Журавлев, Лизунов, Сабельман и Смоляк (III курс), Гирсанов, Синай и Федорюк (IV курс), Онищик и Савин (V курс) и аспирант Крылов.

Кроме секций, работавших в здании университета, в феврале — марте был открыт еще ряд кружков в школах (в основном — по заявкам преподавателей математики этих школ).

Работой школьного кружка руководило бюро кружка (председатель И. В. Гирсанов). Организацией и проведением олимпиады руководил оргкомитет из 14 человек (председатель проф. Е. Б. Дынкин). Оргкомитет обратил особое внимание на установление тесной связи с преподавателями математики в средней школе. Систематически поддерживался контакт с секцией средней школы Московского математического общества.

В феврале 1956 г. был выпущен (тиражом 4000 экз.) сборник задач для подготовки к олимпиаде, составленный по материалам работы школьного кружка. Этот сборник раздавался школьникам на лекциях и заседаниях секций, а также распространялся среди учителей. 2 марта состоялось совещание преподавателей математики московских школ, обсудившее ряд вопросов, связанных с работой школьных кружков и подготовкой к олимпиаде. В течение марта — апреля проводились консультации для участников олимпиады, на которых разбирались задачи из подготовительного сборника.

I тур олимпиады состоялся в воскресенье 1 апреля 1956 г. В нем приняло участие 1120 школьников (в том числе группа шестиклассников 59-й школы Москвы). Через неделю происходил разбор задач I тура. 15 апреля состоялся II тур олимпиады, в котором участвовали 478 школьников, в основном успешно прошедшие I тур<sup>1)</sup>; через неделю состоялось заключительное заседание, на котором был проведен разбор задач II тура.

Как на I, так и на II туре олимпиады было предложено для каждого класса пять задач; тексты их приводятся ниже, на стр. 190—193<sup>2)</sup> на решение задач давалось 5 часов. Большая часть задач была предложена студентами факультета — руководителями школьных кружков (Арнольдом, Кирилловым, Смоляком, Паламодовым и др.). Задачи подбирались так, чтобы в задание каждого класса входили задачи разной трудности и

<sup>1)</sup> Во II туре принимали участие некоторые школьники, не участвовавшие в I туре или не прошедшие его, но допущенные по ходатайству учителя.

<sup>2)</sup> В некоторых случаях одна и та же задача давалась для нескольких классов. В некоторых случаях одна и та же задача давалась для нескольких различных классов; в приводимом ниже перечне тексты этих задач повторены.

разной тематики. Отбирались задачи на заседаниях оргкомитета. При этом окончательные формулировки иногда значительно отличались от первоначально предлагавшихся. Можно сказать, что задачи олимпиады являются в значительной мере результатом коллективного творчества.

Для проверки работ по каждому классу были созданы специальные комиссии. Для того чтобы выработать единые критерии оценок, специально выделенные лица проверяли во всех работах каждого класса одну и ту же задачу.

Классы	Число участников I тура		Число участников II тура		Число успешно прошедших II тур		Похвальные отзывы		Премии		
	Всего	% де-вочек	Всего	% де-вочек	Всего	% де-вочек	Всего	% де-вочек	III	II	I
10	650	20	292	15	114	10	22	18	10	5	1
9	274	30	96	10	40	10	8	12	2	1	1
8	155	27	66	25	33	25	6	33	3	1	2
7	41	40	24	38	20	30	5	20	1	1	1
Всего	1120	21	478	15	207	14	41	20	16	8	5

Наибольшее число участников представили следующие школы Москвы: № 1, 59, 425, 56 и 150; хорошие результаты показали школьники ряда других школ<sup>1)</sup>.

Результаты работы комиссии докладывались на заседании оргкомитета. Все работы, представленные к премии, прочитывались членами оргкомитета. Кроме этого, специально просматривались работы, признанные спорными.

Особенно выдающиеся решения отмечались знаком «!». Общая характеристика работы давалась с учетом того, какие задачи — трудные или легкие — решены в ней, аккуратно или нет изложено решение. Число школьников, решавших и решивших каждую из задач, показано в таблице на стр. 193—194.

После окончания разбора состоялось торжественное закрытие олимпиады, на котором был зачитан список школьников, успешно прошедших олимпиаду, и вручены грамоты и премии победителям, а также грамоты школам и учителям.

Школьные математические кружки, лекции по математике и олимпиады прочно вошли в жизнь московских школьников. Каждую осень, задолго

<sup>1)</sup> Приводим фамилии учителей математики этих школ: И. А. Морозов (школа № 1), Н. Ф. Власик (№ 56), И. В. Морозкин и Т. Н. Фиделли (№ 59), П. В. Сидоров и Н. Л. Токарь (№ 103), Гольдберг (№ 144), В. И. Казаков (№ 150), Л. А. Дикий (№ 327), С. И. Шварцбург (№ 425), Андреева (№ 711).

до начала работы кружков, сотни школьников звонят на факультет и спрашивают, когда состоится открытие кружков.

Математические кружки и олимпиады способствуют повышению математической культуры школьников и увеличивают их интерес к математике. Участие в работе кружков помогает школьникам более сознательно выбирать свою будущую профессию. Многие из победителей олимпиады по окончании школы с успехом учатся на механико-математическом факультете МГУ.

### Задачи, предложенные на XIX олимпиаде

#### 1. Для VII класса

##### Первый тур

1. Докажите, что не существует на плоскости четырех точек  $A, B, C$  и  $D$  таких, что все треугольники  $ABC, BCD, CDA, DAB$  остроугольные.

2. Найти все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется при умножении числа на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

3. Имеется замкнутая самопересекающаяся ломаная. Известно, что она пересекает каждое свое звено ровно один раз. Докажите, что число звеньев четно.

4. Найти все числа, на которые может быть сократима при целом значении  $l$  дробь  $\frac{5l+6}{8l+7}$ .

5. Какое наименьшее число точек можно выбрать на окружности длины 1956 так, чтобы для каждой из этих точек нашлась ровно одна выбранная точка, на расстоянии 1 и ровно одна на расстоянии 2 (расстояния измеряются по окружности)?

##### Второй тур

1. Точка  $O$  — центр круга, описанного около треугольника  $ABC$ . Точки  $A_1, B_1, C_1$  симметричны точке  $O$  относительно сторон треугольника  $ABC$ . Докажите, что все высоты треугольника  $A_1B_1C_1$  проходят через точку  $O$ , а все высоты треугольника  $ABC$  проходят через центр круга, описанного около треугольника  $A_1B_1C_1$ .

2. Точки  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  делят окружность радиуса 1 на шесть равных частей. Из  $A_1$  проведен луч  $l_1$  в направлении  $A_2$ , из  $A_2$  — луч  $l_2$  в направлении  $A_3$ , ..., из  $A_6$  — луч  $l_6$  в направлении  $A_1$ . Из точки  $B_1$ , взятой на луче  $l_1$ , опускается перпендикуляр на луч  $l_2$ , из основания этого перпендикуляра опускается перпендикуляр на  $l_3$  и т. д. Основание шестого перпендикуляра совпало с  $B_1$ . Найди отрезок  $B_1A_1$ .

3. 100 чисел, среди которых есть положительные и отрицательные, выписаны в ряд. Подчеркнуто, во-первых, каждое положительное число, а во-вторых, каждое число, сумма которого со следующим положительна. Может ли сумма всех подчеркнутых чисел оказаться отрицательной? равной нулю?

4. 64 неотрицательных числа, сумма которых равна 1956, расположены в форме квадратной таблицы: по восемь чисел в каждой строке и в каждом столбце. Сумма чисел, стоящих на одной из диагоналей, равна 112. Числа, расположенные симметрично относительно этой диагонали, равны. Докажите, что сумма чисел в любом столбце меньше 1035.

5. На столе лежат 15 журналов, закрывающих его целиком. Докажите, что можно забрать семь журналов так, чтобы оставшиеся журналы закрывали не меньше  $\frac{8}{15}$  площади стола.

## II. Для VIII класса

### Первый тур

1. На сторонах  $AB$  и  $CB$  треугольника  $ABC$  откладываются равные отрезки произвольной длины  $AD$  и  $CE$ . Найти геометрическое место середин отрезков  $DE$ .

2. В десятичной записи положительного числа  $\alpha$  отброшены все десятичные знаки, начиная с третьего знака после запятой (т. е. взято приближение  $\alpha$  с недостатком с точностью до 0,01). Полученное число делится на  $\alpha$  и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться (указать все значения)?

3. На окружности длины 15 выбрано  $n$  точек, так что для каждой имеется ровно одна выбранная точка на расстоянии 1 и ровно одна на расстоянии 2 (расстояние измеряется по окружности). Докажите, что  $n$  делится на 10.

4. Пусть  $a, b, c, d, l$  — целые числа. Докажите, что если дробь  $\frac{al+b}{cl+d}$  сократима на число  $k$ , то  $ad-bc$  делится на  $k$ .

5. На клетчатой бумаге написана таблица, причем в каждой клетке стоит число, равное среднему арифметическому четырех чисел, стоящих в соседних клетках. Все числа в таблице различны. Докажите, что наибольшее число стоит с края (т. е. по крайней мере одна из соседних клеток отсутствует).

### Второй тур

1. Груз весом 13,5 т упакован в ящики так, что вес каждого ящика не превосходит 350 кг. Докажите, что этот груз можно перевезти на 11 полуторатонках. (Весом пустого ящика можно пренебречь.)

2. 64 неотрицательных числа, сумма которых равна 1956, расположены в форме квадратной таблицы по восемь чисел в каждой строке и в каждом столбце. Сумма чисел, стоящих на двух диагоналях, равна 112. Числа, расположенные симметрично относительно любой диагонали, равны. Докажите, что сумма чисел в любой строке меньше 518.

3. Все точки данного отрезка  $AB$  проектируются на всевозможные прямые, проходящие через данную точку  $O$ . Найти геометрическое место этих проекций.

4. 100 чисел, среди которых есть положительные и отрицательные, выписаны в ряд. Подчеркнуто, во-первых, каждое положительное число, во-вторых, каждое число, сумма которого со следующим положительна, и, в-третьих, каждое число, сумма которого с двумя следующими положительна. Может ли сумма всех подчеркнутых чисел оказаться отрицательной? равной нулю?

5. В прямоугольнике площадью 5 кв. единиц расположены девять прямоугольников, площадь каждого из которых равна единице. Докажите, что площадь общей части некоторых двух прямоугольников больше или равна  $\frac{1}{6}$ .

## III. Для IX класса

### Первый тур

1. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  взят четырехугольник  $KLMN$ , образованный центрами тяжести треугольников  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $DBA$  и  $CDA$ . Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника  $ABCD$ , пересекаются в той же точке, что и прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника  $KLMN$ .

2. В десятичной записи положительного числа  $\alpha$  отброшены все десятичные знаки, начиная с четвертого знака после запятой (т. е. взято приближение  $\alpha$  с недостатком с точностью до 0,001). Полученное число делится на  $\alpha$



и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться (указать все значения)?

3. На клетчатой бумаге написана таблица, причем в каждой клетке стоит число, равное среднему арифметическому четырех чисел, стоящих в соседних клетках. Из таблицы выбран кусок. Докажите, что если некоторое число больше всех остальных на этом куске, то оно стоит с края (т. е. по крайней мере одна из соседних клеток отсутствует).

4. Даны положительные числа  $h$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  и расположенный в пространстве треугольник  $ABC$ . Сколькими способами можно выбрать точку  $D$  так, чтобы в тетраэдре  $ABCD$  высота, опущенная из вершины  $D$ , была равна  $h$ , а площади граней  $ACD$  и  $BCD$  соответственно  $s_1$  и  $s_2$  (исследовать все возможные случаи)?

5. Пусть  $a, b, c, d, l$  — целые числа. Докажите, что если дробь  $\frac{al+b}{cl+d}$  сократима на число  $k$ , то  $ad - bc$  делится на  $k$ .

### Второй тур

1. Груз весом 13,5 т упакован в ящики так, что вес каждого ящика не превосходит 350 кг. Докажите, что этот груз можно перевезти на 11 полутоннажах. (Весом пустого ящика можно пренебречь.)

2. В кубе, ребро которого равно 13, выбрано 1956 точек. Можно ли в этот куб поместить кубик с ребром 1 так, чтобы внутри него не было ни одной выбранной точки?

3. Взяли три числа  $x, y, z$ . Вычислили абсолютные величины попарных разностей  $x_1 = |x - y|$ ,  $y_1 = |y - z|$ ,  $z_1 = |z - x|$ . Тем же способом по числам  $x_1, y_1, z_1$  построили числа  $x_2, y_2, z_2$  и т. д. Оказалось, что при некотором  $n$   $x_n = x$ ,  $y_n = y$ ,  $z_n = z$ . Зная, что  $x = 1$ , найти  $y$  и  $z$ .

4. Четырехугольник описан около окружности. Докажите, что прямые, соединяющие соседние точки касания, и не пересекающиеся в одной из этих точек, пересекаются на продолжении диагонали или параллельны ей.

5. На клетчатой бумаге выбраны три точки  $A, B, C$ , находящиеся в вершинах клеток. Докажите, что если треугольник  $ABC$  остроугольный, то внутри или на сторонах его есть по крайней мере еще одна вершина клетки.

## IV. Для X класса

### Первый тур

1. В треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие вершины — на боковых сторонах треугольника. Доказать, что сторона квадрата меньше  $2r$ , но больше  $\sqrt{2}r$ , где  $r$  — радиус окружности, вписанной в треугольник.

2. В десятичной записи положительного числа  $a$  отброшены все десятичные знаки, начиная с пятого знака после запятой (т. е. взято приближение  $a$  с недостатком с точностью до 0,0001). Полученное число делится на  $a$  и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться (указать все значения)?

3. Пусть  $a, b, c, d, l$  — целые числа. Докажите, что если дробь  $\frac{al+b}{cl+d}$  сократима на число  $k$ , то  $ad - bc$  делится на  $k$ .

4. Дана замкнутая пространственная ломаная  $A_1A_2 \dots A_n$ . Некоторая плоскость пересекает все ее звенья:  $A_1A_2$  в точке  $B_1$ ,  $A_2A_3$  — в точке  $B_2$ , ...,  $A_nA_1$  — в точке  $B_n$ . Докажите, что

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} \frac{A_2B_2}{B_2A_3} \dots \frac{A_nB_n}{B_nA_1} = 1.$$

5. Докажите, что система уравнений

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= a, \\ x_3 - x_4 &= b, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1\end{aligned}$$

имеет хотя бы одно положительное решение

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0, \quad x_4 > 0$$

тогда и только тогда, когда  $|a| + |b| < 1$ .

*Второй тур*

1. Подряд выписаны  $n$  чисел, среди которых есть положительные и отрицательные. Подчеркивается каждое положительное число, а также каждое число, сумма которого с несколькими непосредственно следующими за ним числами, положительна. Докажите, что сумма всех подчеркнутых чисел положительна.

2. Девять многоугольников площади 1 расположены внутри квадрата площади 5. Докажите, что некоторые два из них имеют общую часть площади, не меньшую чем  $\frac{1}{9}$ .

3. Взяли три числа  $x, y, z$ . Вычислили абсолютные величины их попарных разностей  $x_1 = |x - y|, y_1 = |y - z|, z_1 = |z - x|$ . Тем же способом по числам  $x_1, y_1, z_1$  построили числа  $x_2, y_2, z_2$  и т. д. Оказалось, что при некотором  $n$   $x_n = x, y_n = y, z_n = z$ . Зная, что  $x = 1$ , найти  $y$  и  $z$ .

4. Докажите, что если в треугольной пирамиде любые два трехгранных угла равны или симметричны, то все грани этой пирамиды равны.

5. На продолжениях сторон  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  правильного  $n$ -угольника  $A_1A_2 \dots A_n$  построить точки  $B_1, B_2, \dots, B_n$  так, чтобы  $B_1B_2$  было перпендикулярно к  $A_1A_2$ ,  $B_2B_3$  перпендикулярно к  $A_2A_3, \dots, B_nB_1$  перпендикулярно к  $A_nA_1$ .

**Число школьников, решивших каждую задачу**

На олимпиаде была принята следующая система оценок:

+ если решение верное;  
± » » » с легко исправимыми ошибками;  
≠ » » » неверное, но содержит верные идеи;  
— » » » в принципе;  
0 » задача не решалась.

№ задач	В первом туре:					Во втором туре:				
	+	±	≠	—	0	+	±	≠	—	0
VII класс	1	16	8	4	9	3	0	2	0	20
	2	1	2	5	23	9	2	1	0	19
	3	6	3	8	13	10	20	0	0	2
	4	2	0	0	15	23	6	7	1	8
	5	3	4	12	11	10	0	0	0	22
VIII класс	1	2	3	0	89	59	1	0	7	35
	2	1	0	10	82	59	26	16	10	12
	3	12	17	19	72	32	0	12	10	14
	4	31	3	3	54	61	4	6	19	19
	5	34	11	10	26	71	5	2	1	16

№ задач		В первом туре:					Во втором туре:					
		+	±	≠	—	0	+	±	≠	—	0	
IX класс	{	1	122	10	9	40	88	1	0	7	48	36
		2	0	14	14	127	114	32	7	12	19	23
		3	85	25	11	42	106	4	4	6	18	60
		4	11	14	49	72	123	2	0	14	24	55
		5	45	4	4	94	122	3	5	29	42	13
X класс	{	1	25	40	138	37	33	28	53	89	47	
		2	4	17	116	103	23	26	21	70	110	
		3	189	5	24	19	11	3	8	60	168	
		4	80	1	39	20	3	2	6	78	161	
		5	6	11	167	56	48	14	18	59	111	

## ОБСУЖДЕНИЕ НОВЫХ СТАБИЛЬНЫХ УЧЕБНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

### 1) В Московском математическом обществе

В двух заседаниях (13.XI.56 и 15.XI.56) Общество совместно с его секциями средней школы и высшей технической школы обсуждало выпущенные Учпедгизом в качестве стабильных новые учебники:

Н. Н. Никитин и А. И. Фетисов, Геометрия, часть I (6 — 9 классы).

А. Н. Барсуков, Алгебра, ч. I (VI — VII классы).

С. И. Новоселов, Тригонометрия (IX — X классы).

Председательствовал президент Общества акад. П. С. Александров. Заседания привлекли необычно большое число участников (около 200 на первом и около 150 на втором) членов Общества и секций. Прения, в которых преобладающее участие приняли, естественно, члены школьной секции, были оживленными, иногда страстными. Ниже публикуется краткое описание обоих заседаний, основанное на сопоставлении записей и устных сообщений некоторых участников заседаний, разумеется, не претендующее на буквальную точность, а лишь на правильное воспроизведение смысла выступлений.

### Заседание 13.XI.56

Решено было начать с обсуждения учебника геометрии и предложить первое слово авторам.

А. И. Фетисов излагает соображения, положенные авторами в основу при составлении учебника <sup>1)</sup>: близость школьного курса к жизни и приложениям; знакомство с чертежными и измерительными инструментами (политехнизация); идея геометрического преобразования, в частности гомотетия как исходный пункт при изложении подобия фигур. До и после напечатания учебник обсуждался в ряде педагогических коллективов, на заседаниях кафедр педвузов (некоторые названы) и наряду с критикой встречал положительные оценки.

Я. С. Дубнов считает, что авторами руководили некоторые добрые намерения: дальнейший отход от евклидовских традиций в описательной части

<sup>1)</sup> Более подробное изложение см. в журнале «Математика в школе», № 3, 1956.

курса (стр. 3—63), в частности разумное перемещение главы о параллельности; внимание к симметрии, гомотетии и др. Однако свежие педагогические идеи ослабляются, хуже того — компрометируются крайне несовершенным их воплощением. На полях своего экземпляра, сказал выступавший, им сделана около 80 критических замечаний, из которых здесь воспроизводится небольшая часть, иллюстрируемая примерами. Очень плохо всё, что относится к измерению, начиная с измерения отрезков (глава 6). Отмечаются крупные проблемы в изложении гомотетии (глава 7). Отсутствуют определения: площади (стр. 175—176), длины дуги (стр. 198), площади круга и его частей (стр. 198—199), вследствие чего вывод формул построен на песке. Усложнены и ухудшены некоторые доказательства (стр. 105—107, 116—117), имеются и прямые ошибки (стр. 28, 67, 91). Можно не сомневаться, что причина неудачи в поспешности авторской и рецензентской работы, в отсутствии контроля со стороны математической общестственности. Ответственны: Министерство просвещения, Учпедгиз, Педакадемия, авторы, рецензенты, жюри. Предложение: на два-три года примириться с преподаванием по любым учебникам, пока не будет создана полноценная книга.

С. И. Шиллов (учитель школы № 409), отмечая доступное изложение первой части книги, указывает на многочисленные ее недостатки, затрудняющие использование книги в качестве учебника.

И. Я. Танатар (учитель школы № 578 и методист Москворецкого района) указывает на непоследовательное изложение главы о гомотетии, серьезные промахи в определениях длины окружности и другие пробелы во второй части учебника. Он говорит, что сложившаяся ситуация напоминает положение, создавшееся 20 лет назад в связи с непригодностью учебника Гангнуса и Гурвица. Сейчас, как и тогда, лучшим выходом окажется временный возврат к учебнику Киселева и объявление нового конкурса.

И. М. Яглом присоединяется к Я. С. Дубнову в положительной оценке общих идей новой книги; поэтому он считает, что учебник нельзя ставить на одну доску с отвергнутой в свое время книгой Гангнуса и Гурвица. Однако правильные идеи не реализованы как следует из-за спешки в работе авторов; поэтому в книге оказалось большое число серьезных дефектов, включая прямые ошибки (приводит примеры).

Плоды спешки можно видеть и на разделе задач, среди которых встречаются ошибочные, иногда непонятные или не относящиеся к тому материалу, после которого они помещены (приводит примеры). Всё дело с изданием этой книги было поставлено совершенно неудовлетворительно. Почему Министерство просвещения издавало ее такими темпами и сразу тиражом в несколько миллионов? Рецензии на книгу также были, по-видимому, недостаточно тщательными, так как и рецензенты вынуждены были торопиться. Общество должно протестовать против такой порочной системы создания стабильных учебников, в частности должно добиваться аннулирования результатов проведенного конкурса. Однако авторам учебника следует предоставить возможность работать над его улучшением.

В. А. Успенский, возражая И. Я. Танатару, заявляет, что учебник ему понравился тем, что содержит явно выраженные идеи и в этом выгодно отличается от книги Киселева. Соглашается с тем, что ошибок много; в частности, изложение вопроса об измерении совершенно неудовлетворительно. Считает, что в качестве стабильного этот учебник не годится, но он может быть временно допущен наряду с учебником Киселева. Общество должно добиваться того, чтобы были наказаны конкретные виновники выпуска миллионным тиражом учебника с такими серьезными недостатками. Следует объявить открытый конкурс и лучшие две книги издать пробным тиражом.

Н. М. Бескин, не касаясь вопроса о качестве учебника, заявил, что Министерство просвещения и Учпедгиз неправильно интерпретируют постановления ЦК КПСС и Правительства о стабильных учебниках, рассматривая их как директиву к изданию единственных учебников по каждому предмету.

сти разумное перемещение главы о параллельности; метрии и др. Однако свежие педагогические идеи компрометируются крайне несовершенным их его экземпляра, сказал выступавший, им сделано аний, из которых здесь воспроизводятся небольшие примерами. Очень плохо всё, что относится к изия отрезков (глава 6). Отмечаются крупные прои (глава 7). Отсутствуют определения: площади (стр. 198), площади круга и его частей (стр. 198—199), тул построен на песке. Усложнены и ухудшены (стр. 105—107, 116—117), имеются и прямые жно не сомневаться, что причина неудачи в посизентской работы, в отсутствии контроля со стоственности. Ответственны: Министерство просвещения, авторы, рецензенты, жюри. Предложение: на преподаванием по любым учебникам, пока не буига.

школы № 409), отмечая доступное изложениеет на многочисленные ее недостатки, затрудняюкачестве учебника.

ель школы № 578 и методист Москворецкого недовольное изложение главы о гомотетии, серьяхх длины окружности и другие пробелы во второй что сложившаяся ситуация напоминает положение, связи с непригодностью учебника Гангуса и Гурлучшим выходом окажется временный возврат кение нового конкурса.

иняется к Я. С. Дубову в положительной оценке этому он считает, что учебник нельзя ставить на свое время книгой Гангуса и Гурвица. Однако ваны как следует из-за спешки в работе авторов; ольное число серьезных дефектов, включая пряеры).

есть и на разделе задач, среди которых встреенятные или не относящиеся к тому материалу, ы (приводит примеры). Всё дело с изданием этой шенно неудовлетворительно. Почему Министерство кими темпами и сразу тиражом в несколько милтакже были, по-видимому, недостаточно тщательвынуждены были торопиться. Общество должно орочной системы создания стабильных учебников, ся аннулирования результатов проведенного конника следует предоставить возможность работать

зражая И. Я. Танатару, заявляет, что учебник ержит явно выраженные идеи и в этом выгодноа. Соглашается с тем, что ошибок много; в частоб измерении совершенно неудовлетворительно. ильного этот учебник не годится, но он может ряду с учебником Киселева. Общество должно наказаны конкретные виновники выпуска милс такими серьезными недостатками. Следует и лучшие две книги издать пробным тиражом. саясь вопроса о качестве учебника, заявил, что и Учпедгиз неправильно интерпретируют постаельства о стабильных учебниках, рассматривая единственных учебников по каждому предмету.

Нормально было бы и не противоречило бы упомянутым постановлениям, если бы и сейчас издавались многие учебники, из числа которых на основе опыта преподавания можно было бы выбрать наилучшие. В качестве члена жюри Н. М. Бескин свидетельствует, что из трех учебников, представленных на конкурс, учебник Никитина — Фетисова был бесспорно лучшим: один из двух других был слишком сложен для средней школы, а другой, принадлежавший лицу, не известному какими-либо предшествующими публикациями, представлял собой неудачную компиляцию из учебников Киселева и Глаголева, причем значительные куски текстов воспроизводились оттуда без изменений. Считает, что учебник Никитина — Фетисова может быть исправлен.

С. Г. Токарь (учитель школы № 281) считает, что выпуск учебника накануне начала учебного года не позволил учителям достаточно подробно с ним ознакомиться. Положение усложнилось отсутствием приспособленного к новому учебнику задачника. Плохо изложено взаимоотношение между гомотетией и подобием. Слишком много теорем и следствий. Работать по учебнику дальше нежелательно.

В. А. Ефремович резко выступает против учебника и тех, кто пытается взят его хотя бы частично под свою защиту. Выпуск Учпедгизом этой книги считает тяжким нарушением государственных интересов. Необходимо издание курса геометрии специально для учителей средней школы; вместе с тем нужен новый учебник для учащихся. (Резкий тон выступления В. А. Ефремовича вызвал сдерживающее замечание председателя.)

И. С. Градштейн приводит пример (стр. 193) громоздкости в формулировках теорем. Нужно издать несколько учебников.

Е. Н. Евзерихина (учительница школы № 58) считает, что с методической стороны учебник совершенно неудовлетворителен. Доказательства ряда теорем не обладают достаточной полнотой и вызывают затруднения не только у учащихся, но и у преподавателей. Как курьез, можно отметить, что в Институте усовершенствования учителей существует специальный семинар, имеющий целью «расшифровку» этого учебника. Не ожидая санкции свыше, многие учителя вернулись к преподаванию по учебнику Киселева. Под аплодисменты собравшихся оратор шутливо предлагает наказать лиц, ответственных за появление учебника, потребовав от них в течение одного года преподавать по этой книге.

Н. Я. Виленкин приходит к выводу, что дело подготовки учебников нельзя доверять Министерству просвещения и Учпедгизу, допустившим непростительную халатность. Перед Министерством следует поставить вопрос о персональной ответственности за выпуск этого учебника и об усилении руководства редакцией математики Учпедгиза. При сложившемся положении должно быть позволено пользоваться старыми учебниками.

Н. Н. Иовлев говорит об отсутствии связи курса арифметики начальных классов с курсом геометрии. Элементы политехнизации в новом учебнике считает недостаточными.

Выполняя настойчивые пожелания присутствующих, выступает зав. редакцией математики Учпедгиза С. А. Пономарев. Он считает виновными авторов и все инстанции Министерства просвещения, в том числе Учпедгиз и жюри. Сжатые сроки выхода книги в свет были установлены Министерством просвещения совместно с Академией педагогических наук. Учпедгиз был склонен к началу учебного года издать только часть учебника геометрии, предназначенную для 6—7-х классов, но Министерство с этим предложением не согласилось. С. А. Пономарев отвечает на многочисленные вопросы с мест, касающиеся организации выпуска новых учебников и подбора авторов; сообщает фамилии участников конкурса (А. С. Ильин, Б. В. Кутузов, Н. Н. Никитин и А. И. Фетисов), некоторых из членов жюри и рецензентов (были названы Н. Ф. Четверухин, С. В. Бахвалов, Н. М. Бескин, В. Г. Чичигин).

И. В. Морозкин (учитель школы № 59) вносит уточнение в предыдущую информацию: из семи членов жюри, в состав которого он входил, один был против издания обсуждаемого учебника.

В заключительном слове А. И. Фетисов признает, что над книгой надо еще серьезно поработать, и просит предоставить авторам эту возможность с учетом суровой критики, имевшей место здесь и в других обсуждениях.

П. С. Александров согласен с выступавшими в том, что книга имеет много недостатков, в том числе и крупных. В этом повинны Министерство просвещения, Академия педагогических наук, затем уже Учпедгиз и авторы. Особая вина лежит на жюри. Общим источником отставания нашей учебной литературы по математике является то, что в течение последних 25 лет в Министерстве просвещения не работает педагогическая мысль, а главную заботу составляют дела административные и выполнение планов. Многие из нас помнят, что раньше положение было иным. О качестве учебника не приходится говорить, если на его написание предоставляется несколько месяцев, а затем он издается миллионным тиражом. Нужно отказаться от системы закрытых конкурсов. Будет поток живой педагогической мысли, будут появляться новые книги — тогда будет из чего выбирать наиболее совершенные учебники. Если вводятся новые программы, но для них не готовы еще учебники, то следует на один-три года отложить переход на эти новые программы.

От имени правления Московского математического общества П. С. Александров обещает подытожить сегодняшнее обсуждение и его продолжение, которое состоится 15 ноября, и письменно сообщить выводы в Министерство просвещения, а возможно и в другие инстанции.

### Заседание 15.XI.56

Обсуждение учебника алгебры Барсукова и учебника тригонометрии Новоселова.

Автор А. Н. Барсуков высказывает соображения, изложенные им более подробно в статье «О новом учебнике алгебры» (журнал «Математика в школе», № 3, 1956): необходимость соблюдения программы; согласованность с современной трактовкой некоторых понятий алгебры; подготовка учеников к овладению понятием функции и ее графического изображения; постоянная связь с арифметикой; доступность изложения для данного возраста и др.

А. З. Рывкин указывает на вопиющую небрежность в издании учебника тригонометрии (свыше 20 грубых опечаток, иногда искажающих смысл). Отмечает нечеткие определения, могущие вызвать недоумение у читателя.

В. Г. Болтянский высказывается по поводу учебника алгебры. Считает, что отрицательные числа вводятся слишком поздно, в результате чего, например на стр. 7, приходится объявлять не имеющим смысла выражение, которому очень скоро будет приписан смысл. При изложении действий над отрицательными числами нельзя смешивать определения с иллюстрирующими их примерами («следовательно») на стр. 26 является недопустимым). На стр. 30—33 слишком много отдельных правил, которые могут быть объединены в одно. Указывает на нечеткость ряда формулировок и определений, находит учебник в целом методически неудовлетворительным.

Н. Н. Николаева (учительница школы № 426, методист Сталинского района) считает учебник тригонометрии Новоселова не безупречным, но им можно пользоваться, в то время как учебником Рыбкина фактически никто не пользовался. Полагает, что учителя довольны учебником алгебры Барсукова. Предлагает вновь издать учебник тригонометрии Берманта и Люстерника; осуждает систему закрытых конкурсов. Выражает недовольство выступлениями некоторых научных работников, критика которых ей кажется высокомерной и не оказывающей преподавателям помощи в создавшемся для них трудном положении.

В. Т. Павлов (учитель школы № 7), возражая Болтянскому, говорит, что учебник Барсукова силен именно в методическом отношении и одобряется

многими учителями. Как пример внимания к методике отмечает приведенный в конце учебника латинский алфавит.

Я. С. Дубиов приводит ряд ошибочных определений и формулировок учебника Барсукова: неверное понимание термина «допустимое значение» (стр. 7); в § 44 не формулируется, однако «решается» задача деления многочленов с остатком; лишенное смысла определение алгебраической дроби (§ 51); ошибочное доказательство равносильности двух систем уравнений (стр. 147). Учебник оставляет впечатление не всегда удачной компиляции, между тем как нужна яркая, имеющая собственное лицо книга (такие у нас имеются: Александров — Колмогоров, Гончаров, Фаддеев — Соинский).

Н. Н. Иовлев считает несущественным вопрос о степени компилятивности нового учебника; полагает, что практики должны быть учебником алгебры довольны.

Е. Н. Обуховская (методист Облоно) приветствует обсуждение новых учебников Московским математическим обществом, но считает его запоздавшим, так как помощь Общества должна была проявиться в период подготовки учебников. Заявляет, что учителя отнеслись положительно к новым учебникам алгебры и геометрии для 6—7-х классов; что касается учебника геометрии для VIII—IX классов и учебника тригонометрии, то учителя поднимают против них «бунт» и считают, что эти учебники не могут быть использованы.

К. П. Сикорский (городской методист) находит учебник Барсукова доступным пониманию учащихся. Деление текста на небольшие по объему параграфы облегчает дозировку домашних заданий. Выступление Болтянского считает неправильным, а критику Рывкина, состоящую главным образом из перечисления опечаток, считает несерьезной. Признает, что новый учебник тригонометрии нелегкий и написан не всегда доступным для учащихся языком.

А. И. Маркушевич обращает внимание на необходимость учета математических и педагогических требований к учебнику для средней школы. Считает, что нормальным следовало бы признать сотрудничество в подготовке учебников педагогов-практиков с научными работниками. Полагает, что с точки зрения педагогической некоторые требования, предъявляемые В. Г. Болтянским к учебнику алгебры А. Н. Барсукова, не являются убедительными. Например, совершенно естественно, что в учебнике (как и в программе) введение буквенных обозначений и упражнения с ними предшествуют знакомству с отрицательными числами. Признавая справедливыми конкретные критические замечания Я. С. Дубнова, считает, что учебник А. Н. Барсукова в основе своей добротен и его дефекты могут быть устранены в последующих изданиях. Считает, что первые главы учебника по геометрии, написанные Н. Н. Никитиным, проще, доступнее и нагляднее, чем в учебнике Киселева, и после устранения отдельных дефектов составят неплохой учебник для VI—VII классов. Напоминает, что любой из прежних учебников, обслуживавших школу долгие годы, подвергался, в особенности в первых изданиях, основательным переработкам.

А. Н. Барсуков (заключительное слово) заявляет, что он учтет в последующей работе над учебником многие из сделанных критических замечаний.

П. С. Александров повторяет, что учебник геометрии представляется ему неудовлетворительным. По поводу учебника алгебры согласен с замечаниями Дубнова, относящимися к делению многочленов (указывает, какова должна быть правильная постановка задачи) и алгебраическим дробям, но полагает, что книгу можно исправить и по ней можно будет работать лучше, чем по Киселеву. Нужно, чтобы было много различных учебников, среди которых имеет право на существование и учебник Барсукова. Считает ошибкой издание новых учебников сразу тиражом в несколько миллионов экземпляров; не должно быть также закрытых конкурсов и срочности в деле создания новых стабильных учебников.



По поводу учебника тригонометрии Новоселова П. С. Александров замечает, что ознакомился с ним поверхностно, но кое-что в учебнике показалось ему интересным; в частности, он одобряет возвращение к уже применявшемуся некоторыми педагогами определению тригонометрических функций с помощью координат. Отвечая на вопрос о второй части учебника алгебры Александрова и Колмогорова, сообщает, что надеется на завершение его в ближайшие годы.

Выполняя принятое на себя в заседании 13.XI.56 обязательство, президент Московского математического общества П. С. Александров обратился 12.XII.56 в Министерство просвещения РСФСР с письмом, существенную часть которого мы приводим текстуально:

«...учебники были подвергнуты серьезной критике. Были указаны также крупные недостатки в работе Министерства просвещения РСФСР и Учпедгиза по подготовке и изданию этих учебников и вообще по организации выпуска учебной литературы по математике:

1. Особенно резкую критику вызвал учебник Никитина и Фетисова. Хотя в первой части этого учебника отразились правильные методические установки, однако учебник в целом и в особенности его вторая часть непригодны для употребления в школьном преподавании ввиду большого числа неточных и неясных формулировок, излишне усложненных доказательств, а также наличия прямых ошибок. Выпуск этого учебника тиражом в несколько миллионов экземпляров должен быть решительно осужден.

Учебник Новоселова наряду с некоторыми интересными методическими новшествами содержит и ряд излишних усложнений. Он выпущен, кроме того, с недопустимо большим числом опечаток и неточностей.

Наконец, учебником Барсукова можно пользоваться в преподавании наряду с другими учебниками по алгебре. Он не отличается, однако, ни оригинальностью методических идей, ни особыми достоинствами изложения, и выпуск его не решает задачи подготовки полноценного учебника по алгебре.

В целом выпуск всех этих учебников в качестве стабильных был серьезной ошибкой.

2. Следует признать недопустимым такой порядок подготовки стабильных учебников, при котором в порядке закрытого конкурса спешно готовятся учебники, и отобранный учебник без выпуска пробным тиражом, без ознакомления с ним всех учителей, без широкого обсуждения научной и педагогической общественностью объявляется стабильным и выпускается многомиллионным тиражом.

В действительности порядок должен быть иным: ежегодно должны выпускаться несколько учебников разных авторов по каждому из школьных математических предметов, причем тиражами, достаточными для ознакомления с ними всех преподавателей математики; эти учебники должны широко обсуждаться, испытываться в практическом преподавании, выпускаться новыми изданиями. В результате этой работы, способной наилучшим образом отразить методический опыт нашего учителя и помочь накоплению такого опыта, появятся учебники,

которые на самом деле будут самыми лучшими и поэтому смогут быть принятыми на ряд лет в качестве стабильных.

3. Ввиду сказанного необходимо следующее:

а) Учебник Никитина и Фетисова признать непригодным для употребления в качестве стабильного учебника по геометрии. Разрешить пользоваться наряду с учебниками Барсукова и Новоселова и другими учебниками по алгебре и тригонометрии.

б) Прекратить подготовку учебников путем закрытых конкурсов. Рукописи, представленные на конкурсы, в настоящее время еще не закончившиеся, рассматривать лишь с точки зрения их пригодности для выпуска пробным тиражом.

в) Предусмотреть в плане Учпедгиза ежегодный выпуск нескольких новых учебников по математике пробными тиражами, а в дальнейшем планировать переиздание некоторых из этих учебников.

г) Укрепить руководство математической редакции Учпедгиза. Отметим, что последнее пожелание уже высказывалось в письме, направленном Вам Правлением Московского математического общества 16 мая 1956 г. Это письмо осталось, к сожалению, без реальных последствий.

4. Достойно сожаления, что в деле выпуска учебников по математике Министерство просвещения РСФСР и Учпедгиз столь буквально повторяют ошибки, допускавшиеся Наркомпросом РСФСР и Учпедгизом еще двадцать с лишним лет назад, ошибки, весьма резко осужденные в свое время советской математической общественностью (см., например, резолюции группы математики Академии наук СССР в журнале „Успехи математических наук“, вып. 4 (1938), стр. 309—313, и вып. 5 (1938), стр. 243—244).

## 2) В объединенном семинаре кафедр высшей математики московских вузов

Очередное заседание семинара 14.XI.56 было посвящено рассмотрению новых программ и учебников по математике для средней школы. Было три доклада: по геометрии, тригонометрии и алгебре.

В своем вступительном слове руководитель семинара А. Ф. Бермант подвергает критике деятельность Министерства просвещения РСФСР, Учпедгиза и Академии педагогических наук по созданию новых учебников и программ и останавливается на вопросах математической подготовки учащихся средних школ и на недостатках стабильных учебников. В частности, он считает целесообразной бифуркацию средней школы, начиная с VIII класса, или же организацию специального XI класса для подготовки в вузы. Этот класс будет особенно полезен для поступающих в вузы после работы на производстве.

Отбор учебников для средних школ должен производиться не путем закрытых конкурсов, а путем выпуска большого числа разнообразных учебников, чтобы в результате практической работы по этим книгам выявились лучшие из них.

Первый докладчик В. Б. Гуревич рассмотрел новую программу по геометрии и учебник геометрии Н. Н. Никитина и А. И. Фетисова. Он отметил

ряд достоинств программы: в ее первой части больше элементов отведено наглядности, сделан ряд удачных перестановок. Интересным является введение практических занятий. Однако имеются и утяжеления программы; не следует считать оправданным введение в программу гомотетии, лишь усложняющей изучение раздела «Подобие». Есть ошибки в разделе, посвященном измерению отрезков, в котором к понятию несоизмеримых отрезков предлагается прийти, отправляясь от реального измерения отрезков. В целом же программа, с точки зрения требований втуза, удовлетворительна.

Учебник по геометрии написан применительно к этой программе. Первая часть его обладает рядом методических достоинств: она написана ясным языком, учитывающим возрастные особенности школьников, нет теорем, введены различные измерительные работы. Однако в дальнейшем в учебнике обнаруживаются серьезные недостатки. Так, например, при рассмотрении некоторых вопросов, в которых следовало бы базироваться на интуиции, авторы уходят в чрезмерную строгость. Так получилось с понятием длины, с измерением отрезков, где допущены ошибки. Плохо изложен раздел гомотетии — изложение неудовлетворительно с научной стороны. Сделана неудовлетворительная попытка освободиться от понятия предела, что привело к неудачному изложению вопросов, связанных с длиной окружности и площадью круга.

На всей книге лежит печать спешки; написанная в чрезмерно краткий срок, она содержит много дефектов со стороны научной и методической. В настоящем своем виде книга не может оставаться стабильным учебником.

Содокладчик В. М. Шепелев отметил, что в учебнике геометрии не подчеркнуто значение обратных теорем; имеется одна обратная теорема, изложенная неверно. Не уделено внимание приближенным вычислениям, в самом учебнике имеются неправильные вычисления.

Второй докладчик Р. С. Гутер рассмотрел программу и учебник по тригонометрии. Он указал, что новая программа недостаточна не только для втузов, но она не обеспечивает и требований, предъявляемых к квалифицированным токарям. Со стороны формульного материала программа содержит достаточно сведений, но в ней не подчеркнута необходимость воспитания у школьников навыков функционального мышления, что особенно важно с точки зрения потребностей втузов. Далее, в тригонометрии имеются большие возможности для выработки вычислительных навыков — это также не подчеркнуто в программе. Программа предусматривает исключение обратных тригонометрических функций и уменьшение материала по тригонометрическим уравнениям. Это тяжело скажется на работе кафедр математики втузов и против этого следует протестовать.

Учебник С. И. Новоселова методологически построен правильно. Тригонометрические функции рассматриваются как функции числового аргумента, имеется достаточное количество примеров, приложений. Но на книге лежит печать спешки. Многие определения даны нечетко, имеются неудачные и ненужные определения вроде определения угла, которое дано на первой странице учебника. В ряде мест отсутствует связность изложения. Изложение неравномерное; например, сведения о векторах даны бегло и содержат ряд теоретических погрешностей, причем важные соображения запрятаны в сноски и примечания. Вряд ли можно считать удачным данные в учебнике определения тангенса и котангенса. Неверно применение для обратных тригонометрических функций градусных мер — оно приведет к затруднениям в понимании студентами втузов многих простейших фактов. На 96 страницах учебника имеется 25 грубых опечаток и огромное число мелких, пропущены номера формул и чертежей, на некоторых чертежах не хватает буквенных обозначений. Всё это — плод небрежной работы автора, редактора и издательства. Необходимо помочь учащимся выпуском списка опечаток и исправлений к этому учебнику.

Третий докладчик В. В. Зорин рассмотрел программу и учебник алгебры. Он отметил, что в знаниях поступающих во втузы очень часто наблюдается

формализм. Учащиеся в общем плане формулируют определение, умеют доказать, но не умеют применить эти знания даже в простейших случаях. Слабая логическая подготовка учащихся; это особенно сказывается на понимании необходимых и достаточных условий. Программа по алгебре достаточно обширна, но составлена она так, что в ней отсутствуют слова: «определение», «аксиома». Лишь один раз в программе для 9-го класса встречается слово «теорема» и в учебнике для 10-го класса один раз в скобках поставлена «теорема». Всё это нацеливает учителя на аморфное изложение алгебраического материала и, в конечном счете, приводит к недостаткам в понимании алгебры школьниками.

Учебник А. Н. Барсукова обладает рядом достоинств: он очень простой, легко читаемый. Но в учебнике видна ориентация на слабого ученика и на слабого учителя. Книга построена по схеме: пример — правило, пример — правило. При этом источник возникновения этих правил остается неизвестным. Учебник не приучает учащихся думать. Есть и другие дефекты; всё это делает учебник мало пригодным для повышения математической культуры школьников.

С. И. Зетель отметил ряд недостатков учебника геометрии: в разделе, относящемся к равенству треугольников, теореме о медианах и др. Учить и учиться по новому учебнику геометрии нельзя. Книга должна быть переделана коренным образом. Поражает несогласованность вузовских программ со школьными: например, во многих вузах вводится теория вероятностей, а из школы выводится комбинаторика.

Автор учебника геометрии Н. Н. Никитин сопоставил программы дореволюционной русской школы с действующими программами советской школы. Он считает, что при действующих программах продолжительность обучения в нашей школе недостаточна. В перспективе мы можем перейти на бифуркацию, но, учитывая перегрузку учащихся, это окажется весьма затруднительным. Введение новых предметов уже повлекло некоторое уменьшение числа часов в 10-х классах. Предполагается снять из программы обратные тригонометрические функции, уменьшить удельный вес тригонометрических уравнений, снять темы «соединения и бином». Преподаватели высшей технической школы понимают всё значение для нее упомянутых разделов, но их не всегда поддерживают авторитетные ученые.

Критику учебника в значительной мере надо признать верной. Относительно замечаний С. И. Зетеля автор считает на основании личного опыта, что преподавание этого материала по учебнику школьниками воспринимается хорошо. Необходимо бороться с приверженностью к Киселеву, которая выявилась в процессе обсуждения (говорилось о «киселевобоязни»): есть приверженность «к старинке».

Е. Б. Ваховский считает, что необходимо временное возвращение к учебникам Киселева. Целесообразно поставить вопрос о бифуркации школы. Вместе с этим пора ввести порядок и в приемные испытания. Во многих вузах вместо действительного выявления знаний по математике даются задачи, требующие для решения весьма искусственных приемов.

И. Т. Бородуля считает, что школьники не подготовлены к работе по учебнику С. И. Новоселова. Этот учебник лучше Рыбкина, но приспособленный к нему задачник отсутствует. Учебник Новоселова требует больше подготовленности и от самого учителя. Обратные тригонометрические функции даны в этом учебнике рано и неполно. Автор проявил «непротивление злу», согласившись на исключение из программы важных тем. После исправлений и дополнений книга Новоселова будет полезным пособием для средней школы, не обязательно стабильным. Учебник алгебры Барсукова лучше старого, для 6-х и 7-х классов подходящий, хотя и в нем имеются дефекты.

Тов. Алексаннн считает, что изменения в программах школ должны сочетаться с изменениями во вузовских программах.

Второй автор учебника геометрии А. И. Фетисов признает правильной критику этого учебника, но считает достижением введение гомотетии.

П. А. Ларичев считает все изменения в программах оправданными и целесообразными. Критика в адрес учебников в основном была правильной. Система издания стабильных учебников в той форме, в которой она действует сейчас, порочна, но она утверждена, и Министерство просвещения не может ее отменить. Правда, можно издавать пробные учебники, но этого недостаточно. Надо привлечь к созданию учебников учителей и научных работников. Стать на путь обучения по разным учебникам — затруднительно. У нас учебники в продажу не поступают, рассылаются по школам; это плохо, но пока приходится с этим мириться.

П. А. Безсонов считает необходимым поставить вопрос о создании в школе 11-го класса и изъять из рук некоторых «инициативных» людей дело подготовки в вузы. С государственной точки зрения следовало бы организовать, если не курсы, то особые классы по подготовке в высшие технические школы, причем подготовку вести на более высоком уровне, чтобы снять с I и II курсов института некоторую часть работы. Наконец, своевременна и постановка вопроса о бифуркации школы.

После заключительного слова А. Ф. Берманта семинар поручил своему бюро составление резолюции по обсуждаемому вопросу и доведение до сведения директивных органов этого решения.

Ниже приводится текст этой резолюции.

### Резолюция <sup>1)</sup>

Бюро семинара находит положение, сложившееся с постановкой преподавания математики в 10-летней средней школе, крайне неблагоприятным, требующим безотлагательного принятия решительных мер по его изменению и улучшению.

А. Бюро констатирует:

1. Поставленная перед органами просвещения важная задача постепенного превращения 10-летней школы в массовую школу обязательного обучения на базе ее политехнизации вызвала перестройку программы по курсам математики, которая, не удовлетворяя принципам политехнизации, серьезно снижает математический уровень выпускников школ с точки зрения потребностей вузов (вузов). Эта перестройка в общем и целом свелась к исключению ряда безусловно нужных для высшей школы тем и к неоправданному в настоящих условиях внесению темы лишь об одном из понятий высшей математики (о понятии производной). Таким образом, возникли «ножницы» между требованиями вузов и подготовкой учащихся средней школы. Возникновение таких ножниц объ-

<sup>1)</sup> Помещая без сокращений резолюцию научно-педагогического коллектива, объединяющего значительное число кафедр высшей математики, редакция не может присоединиться к некоторым содержащимся в ней высказываниям. В частности, деятельность Учпедгиза по изданию математической литературы дает так много бесспорных поводов для суровой критики, что следовало бы воздержаться от нареканий персонального характера, связанных с подбором авторов. Равным образом, мы не можем согласиться с тем, что работа Академии педагогических наук в области пересмотра программ по математике квалифицируется резолюцией как «проектерские планы коренной ломки всей схемы обучения». Здесь резолюция солидаризируется с теми школьными консерваторами, которые несколько лет тому назад восприняли как «потрясение основ» попытку АПН несколько модернизировать школьный курс математики. (Примечание редакции.)

ясняется тем, что одновременное достижение — по существу, а не чисто формально — двух целей: подготовки к непосредственному, вслед за получением среднего образования, участию в трудовой жизни и подготовки к дальнейшему непосредственному (а тем более после какого-нибудь перерыва) продолжению образования в высшей школе — невозможно. Эти цели несовместимы в одной общей массовой 10-летней школе.

2. Вследствие ряда обстоятельств (перегрузка учащихся, «проценто-мания», перегрузка учителей, неудовлетворительная квалификация известной части учительства, недостаточная требовательность к качеству обучения), причиняющих большое зло школе, за последние годы ухудшилась математическая подготовка поступающих во вузы из средней школы. Следует ожидать, что несовместимость двух задач, поставленных перед средней школой, а также новые программы и учебники приведут к дальнейшему ухудшению этой подготовки. Вместе с тем существующие уже теперь трудности поступления во вузы, заставляющие стремиться к повышенным оценкам на конкурсных экзаменах, вызывают потребность в дополнительных занятиях по математике в частном порядке, что доступно только для хорошо обеспеченных слоев населения. Это явление, не говоря уже о недопустимой социальной окраске его, суживает контингент, из которого можно отбирать наиболее способных молодых людей для комплектования высшей школы.

3. Очень небольшая группа выпускников средней школы всё же поступает во вузы, и при изменении статуса средней школы нельзя игнорировать интересы этой группы. Из нее высшая школа призвана подготовить специалистов высокой квалификации, в которых так нуждаются наука, культура и производство, растущее под воздействием бурно развивающейся передовой техники.

4. В качестве здоровой реакции на разрушающую нормальную школу практику дальтон-плана, фузионизма и рассыпных учебников, в середине 30-х годов была введена стабилизация программ и учебников по математике на базе старых, еще дореволюционных, образцов. Через некоторое время, во всяком случае не позже окончания Отечественной войны, стабильность учебников из положительного фактора обратилась в резко отрицательный, тормозящий творческое развитие содержания и методов преподавания, способствующий не повышению квалификации учительства, а понижению ее, закоснощению учительского мастерства. Система стабилизации учебников изжила себя.

5. Намеченный в 1937—1938 гг. план выпуска «пробных» учебников, призванных через проверку опытом и критикой к улучшению учебной литературы, не был выполнен ни в какой мере. За 20 лет вышло считанное число (буквально единицы) «пробных» учебников, испытанием которых никто всерьез не занимался, так что они не сыграли той роли, которую должны были сыграть в деле создания новых учебников. Вообще, за 20 лет было издано такое ничтожное количество новых учебных книг по математике для средней школы, что следует считать эту литературу практически не существующей. И уж, разумеется, она

не идет ни в какое сравнение с соответствующей литературой, изданной в России за 20 лет, предшествующих 1917 г. (в противоположность этому литература по высшей математике выпускается такими издательствами, как Гостехиздат, ИЛ, во все увеличивающихся количествах, удовлетворяя, в основном, потребности науки и техники). Учпедгиз РСФСР — главный издатель для средней школы — не только не привлекал авторов, но всячески затруднял выпуск новых книг; он превратился в конце концов в закрытое заведение, обслуживаемое небольшой замкнутой группой авторов, состоящей преимущественно из сотрудников аппарата самого Учпедгиза или близких к нему учреждений.

Хорошие учебники могут возникать только в результате свободного соревнования, жизненной проверки, отбора и критики.

Трудно назвать еще другую область нашей жизни, где в течение такого длительного времени царил бы такой застой и рутина, как в деле обучения подрастающего поколения основам математики.

6. Различные научные и учебные заведения и общественные организации (Академия наук СССР, Академии наук союзных республик, университеты, пединституты, Московское математическое общество), работающие в области математической науки и ее преподавания, за весь военный и послевоенный период ничего не сделали для того, чтобы способствовать преодолению опасных дефектов в постановке преподавания математики в средней школе, хотя ясно видели эти дефекты. До войны математический институт Академии наук СССР и Московское математическое общество интересовались вопросами средней школы, инициативно участвовали в решении этих вопросов, добиваясь должных результатов. Следует также вспомнить, что обучением математике в средней школе в старое время по-настоящему занимались крупнейшие русские математики, такие, как Остроградский, Чебышев, Жуковский и др.

Особое место в ряду указанных учреждений принадлежит Академии педагогических наук РСФСР (а также специальным институтам методов обучения в союзных республиках), смысл существования которых только и состоит в своевременной разработке разумных методов преподавания и в создании серьезной учебной литературы. За много лет функционирования, в «состоянии постоянного возбужденного бездействия», эти научно-педагогические институты, как оказалось на проверку, ничего не смогли дать ни для математической педагогики, ни для практики преподавания, за исключением разве лишь нескольких прожектерских планов коренной ломки всей схемы обучения, вызвавших, естественно, резкое противодействие со стороны учителей и породивших недоверие учителя к участию научных работников в делах средней школы.

7. Все перечисленные обстоятельства резко сказались в тот момент, когда от органов просвещения потребовалось осуществить перестройку школы. Оставаться и дальше при учебниках Киселева и Рыбкина, почитавшихся передовыми учителями устаревшими еще 30—40 лет тому назад, было совершенно невозможно и потребовалось найти замену. А такой замены подготовлено не было, портфели Министерства просве-

нения, Учпедгиза и Академии педагогических наук по существу были пусты. Тогда и были предприняты меры, заведомо обреченные на провал: срочное написание учебников и отбор их через систему закрытых конкурсов.

8. Для 10-летней средней школы издано три стабильных учебника: 1) по геометрии — Н. Н. Никитина и А. И. Фетисова (сотрудники Академии педагогических наук); 2) по тригонометрии — С. И. Новоселова (сотрудник Учпедгиза); 3) по алгебре — А. Н. Барсукова (сотрудник Учпедгиза). Все эти учебники в качестве стабильных негодны.

а) Новый учебник геометрии содержит большое количество грубых методических и научных ошибок, нехорошо спланирован. Авторы признали недостатки учебника, которые являются, по их словам, следствием спешки при написании и рецензировании рукописи. Учебник издан Учпедгизом РСФСР в количестве 3,6 миллиона экземпляров и является как стабильный единственно допустимым учебником геометрии в средней школе. Вполне понятны массовые протесты учителей против введения этого учебника в среднюю школу.

б) Новый учебник тригонометрии также содержит большое количество ошибок методического и научного характера, опечаток, \*опечаток и т. п. На 5 печ. листах отмечено более 50 всякого рода погрешностей. Учебник издан Учпедгизом РСФСР в количестве 1,6 миллиона экземпляров. Лишь под руководством достаточно квалифицированного педагога обучение по этому учебнику может не принести вреда.

в) Новый учебник алгебры в научном и в методическом отношении является шагом назад по сравнению со старым учебником алгебры Киселева.

9. Издание перечисленных негодных учебников, без достаточной проверки, в качестве стабильных многомиллионными тиражами (следует учесть, что, как правило, «стабильная» продукция Учпедгиза сразу переводится на многочисленные языки народов СССР) является деянием, граничащим с преступлением. Нельзя не отметить также, что это издание оскорбительно для всей советской математики, известной во всем мире своим высоким уровнем и крупными достижениями.

Разумеется, со всеми административными работниками, причастными к выпуску указанных учебников и к их стабилизации, ответственность должны разделить и члены комиссий, неряшливо рассматривавших рукописи и легкомысленно отнесшихся к важному государственному поручению.

10. Всё указанное оказалось возможным, между прочим, и потому, что у нас отсутствует организованная учительская общественность, а значит и критика. Здесь уместно вспомнить, что съезды преподавателей математики в средней дореволюционной школе выявляли общественное мнение учительства и были источниками многочисленных полезных прогрессивных начинаний в области математической педагогики. До сих пор в трудах этих съездов учителя находят интереснейший материал для своих работ по совершенствованию методики и организации преподавания математики.



Б. Бюро вносит предложения:

1. Перед массовой 10-летней средней школой должна быть поставлена задача: дать общее среднее образование молодому человеку, подготовив его к трудовой жизни. Для целей же подготовки к поступлению в вузы необходимы дополнительные мероприятия:

а) Организация на базе 10-летней школы годичных специальных классов, в которых должно проводиться насыщенное обучение с определенным уклоном. Многолетний опыт специальных классов во Франции свидетельствует в пользу организации таких классов.

б) Специализация в ряде выделенных школ последних трех классов. Бифуркация средней школы приводила, как известно, к положительным результатам.

в) Организация государственных курсов по подготовке в вузы.

Своим преимуществом при зачислении в вузы молодой человек, проработавший несколько лет на производстве, сможет фактически воспользоваться только тогда, когда будут функционировать хорошо устроенные государственные учебные заведения по подготовке в вузы.

Осуществление указанных мероприятий позволит составить целеустремленные и разгруженные программы по математике для общей школы, во многом отличающиеся от ныне существующих, пытающихся достигнуть две несовместимые цели. Точно так же это позволит дать серьезную целенаправленную математическую подготовку в специальных классах для поступающих во вузы. Увеличение для лиц, обучающихся в 11-м специальном классе, времени обучения до вуза (оно не превысит соответствующего времени в дореволюционной России и за рубежом) компенсируется значительными качественными преимуществами такой системы и возможным сокращением времени обучения во вузе. Подготовка в специальном 11-м классе или в специализированных 8, 9, 10-х классах дает возможность освободить программы вузов от несвойственных им тем и усовершенствовать учебные планы (например, безболезненно начинать физику с 1-го семестра), а также поможет преодолеть школярство, присущее нынешнему стилю работы вузов.

2. Немедленно разрешить школам пользоваться ранее утвержденными стабильными учебниками по математике (по геометрии, тригонометрии и алгебре) Киселева и Рыбкина, изъять из обращения стабильный учебник по геометрии Н. Н. Никитина и А. И. Фетисова, составить и разослать всем полным средним школам необходимые изменения и исправления в стабильном учебнике по тригонометрии С. И. Новоселова.

3. Поручить квалифицированной и объективной комиссии, наделенной соответствующими правами, детальное исследование и изучение всех обстоятельств, относящихся к органам, учреждениям и заведениям министерств просвещения, а также к научным, учебным и общественным организациям других ведомств, которые привели к продолжительному застою в математической педагогике в средней школе.

Особое место в работе комиссии должно занять выяснение обстоятельств, связанных с выпуском миллионными тиражами негодных учебников и утверждением их в качестве стабильных.

4. Отменить систему стабилизации учебников, заменив ее системой, при которой по каждому предмету ответственный и компетентный орган рекомендует к использованию в школе ряд доброкачественных учебников, удовлетворяющих всем условиям утвержденной программы. Позволить жизни производить отбор лучших.

5. Увеличить план выпуска учебной литературы по математике для средней школы. Привлечь в качестве авторов творчески работающих учителей школы и научных работников — математиков, изыскав пути стимулирования важнейшей работы по составлению учебных пособий. Отменить систему закрытых конкурсов. Создать при Учпедгизе квалифицированный и деловой редакционный совет с достаточно большими полномочиями.

6. Предпринять меры к созданию всесоюзного общества преподавателей математики в средней школе, предоставив ему широкие возможности для обсуждения всех вопросов, касающихся математической педагогики в средней школе, для проявления инициативы и творческих начинаний.

## ГРАФИЧЕСКОЕ НАХОЖДЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИНОМА

Вычисление значений полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

может быть, как известно, выполнено по следующей схеме (Горнера):

$$P_0 \equiv a_0, \quad P_1 = P_0x + a_1, \quad P_2 = P_1x + a_2, \quad \dots, \\ \dots P_n = P_{n-1}x + a_n = f(x).$$

Промежуточные результаты  $p_1, p_2, \dots$  и окончательный  $p_n$  могут быть получены графически следующим образом:

1°. На оси  $OY$ , образующей с осью  $OX$  острый угол, отложим (в положительном направлении) масштабный отрезок  $OM$ , и через точку  $M$  проведем прямую  $\nu$ , перпендикулярную оси  $OX$ .

Отложим на оси  $OY$  отрезок  $OS$ , соответствующий тому значению  $x$ , для которого требуется вычислить  $f(x)$  (таким образом,  $\vec{OS} = \vec{OM} \cdot x$ ) и через точку  $S$  проведем прямую, параллельную оси  $OX$  до пересечения с прямой  $\nu$  в точке  $P$ .

Прямая  $OP$  будет играть основную роль в последующих построениях.

2°. На оси  $OY$  строим отрезок  $OO_0 = a_0$  (точнее,  $\vec{OO}_0 = \vec{OM} \cdot a_0$ ), проводим через  $O_0$  прямую, перпендикулярную оси  $OX$  до пересечения в точке  $P_0$  с основной прямой  $OP$ ; через точку  $P_0$  проводим прямую параллельно оси  $OX$  до пересечения с осью  $OY$  в точке  $A_1$ ; легко понять, что  $OA_1 = p_0 \cdot x$ .

3°. Отложив на оси  $OY$  отрезок  $A_1O_1 = a_1$  (точнее:  $\vec{A_1O_1} = \vec{OM} \cdot a_1$ ), получим  $OO_1 = p_1$ .

С помощью точки  $O_1$  выполним построение точки  $P_1$ , а затем и точки  $A_2$ , точно так же, как были построены

## НОВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКИ<sup>1)</sup>

1. А. Сельберг. *Элементарное доказательство асимптотического закона распределения простых чисел.*

Еще Гаусс, изучая таблицы простых чисел, подметил, что при больших  $x$  число  $\pi(x)$  простых чисел, не превосходящих  $x$ , близко к дроби  $\frac{x}{\ln x}$ , где  $\ln x$  — натуральный логарифм  $x$ . Первый обоснованный результат в этом направлении был получен в середине прошлого века Чебышевым, который установил, что имеет место следующее неравенство:

$$a \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b \frac{x}{\ln x}, \quad (1)$$

справедливое для всех  $x \geq 2$ ; здесь  $a$  и  $b$  — некоторые положительные постоянные. Чебышев также доказал, что если отношение

$$\pi(x) : \frac{x}{\ln x} \quad (2)$$

при  $x \rightarrow \infty$  стремится к какому-либо пределу, то этот предел обязательно равен единице; однако ему не удалось доказать сам факт существования предела.

Утверждение, что предел отношения (2) равен единице, принято называть *асимптотическим законом распределения простых чисел*. Первое доказательство асимптотического закона распределения простых чисел было дано после многих неудачных попыток лишь в 1896 г. независимо друг от друга французским математиком Адамаром и бельгийским математиком Валле-Пуссен. Однако методы, которыми они пользовались, были много сложнее элементарного метода Чебышева. И Адамар, и Валле-Пуссен, следуя идеям Римана, применили развитый аппарат теории функций комплексного переменного; основную роль в их построениях играла введенная Риманом аналитическая дзета-функция

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots,$$

где  $s$  — комплексное переменное.

<sup>1)</sup> Под этим названием редакция помещает краткие заметки, посвященные интересным работам, выполненным в разных областях математики у нас и за рубежом. Заметки рассчитаны на читателя, не являющегося специалистом в той области, к которой относится работа.

В течение долгого времени усилия многих ученых были направлены на то, чтобы упростить доказательства Адамара и Валле-Пуссена. Первоначальное доказательство было сильно упрощено, однако до последнего времени не было известно доказательства асимптотического закона распределения простых чисел, которое не использовало бы методов теории функций комплексного переменного; высказывалось даже предположение, что такого доказательства вообще не существует. Тем большей сенсацией явились результаты норвежского математика А. Сельберга, которому в 1949 г. удалось дать элементарное, т. е. не использующее теорию функций комплексного переменного, доказательство асимптотического закона.

Доказательство Сельберга состоит из двух частей. В первой части выводится равенство

$$\sum_{p \leq x} \ln^2 p + \sum_{pq \leq x} \ln p \ln q = 2x \ln x + x C(x), \quad (3)$$

где  $p$  и  $q$  означают простые числа, а функция  $C(x)$  ограничена при  $x \rightarrow \infty$ . Вторая часть доказательства Сельберга состоит в выводе из тождества (3) асимптотического закона. В начале он получает неравенство

$$F(x) \leq \frac{1}{\ln x} \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{x}{n}\right) + x \delta(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = 0, \quad (4)$$

где  $F(x) = \left| x - \sum_{p \leq x} \ln p \right|$ . Для доказательства асимптотического закона достаточно показать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = 0.$$

Еще Чебышев доказал, что отношение  $\frac{F(x)}{x}$  ограничено для всех  $x \geq 2$ . Пусть  $F(x) \leq c_0 x$  для всех  $x \geq x_0$ . Если в неравенство (4) подставим вместо  $F\left(\frac{x}{n}\right)$  выражение  $c_0 \frac{x}{n}$ , то мы получим из (4)  $F(x) \leq c_0 x$ , т. е. не достигнем никакого улучшения оценки. Помогает следующее обстоятельство. Из одного неравенства Чебышева вытекает, что для довольно значительной части целых  $n$  неравенство  $F\left(\frac{x}{n}\right) \leq c_0 \frac{x}{n}$  можно улучшить, заменив его неравенством  $F\left(\frac{x}{n}\right) \leq \varepsilon \frac{x}{n}$ ,  $\varepsilon < c_0$ . Интересно отметить, что мы не можем из неравенства Чебышева вывести, для каких конкретно  $n$  выполняется более точное неравенство, можем лишь утверждать, что таких «хороших»  $n$  достаточно «много». Подставляя эту новую оценку в неравенство (4), мы получим неравенство  $F(x) \leq c_1 x$ ,  $c_1 < c_0$ , уже для всех  $x \geq x_1$ . Продолжая этот процесс, Сельберг полу-

чает цепь неравенств:

$$F(x) \leq c_2 x, \quad x \geq x_2, \quad c_2 < c_1; \quad F(x) \leq c_3 x, \quad x \geq x_3; \quad c_3 < c_2; \dots,$$

причем, оказывается, что последовательность  $c_n \rightarrow 0$ .

Следует отметить, что элементарное доказательство Сельберга является очень сложным; это доказательство до сих пор, несмотря на некоторые его упрощения, полученные в последние годы, всё еще остается более длинным и запутанным, чем доказательство, использующее теорию функций комплексного переменного. Однако принципиальная возможность такого доказательства сама по себе весьма интересна; дальнейшее его упрощение — дело будущего.

### Литература

1. A. Selberg, An elementary proof of the prim-number theorem, Ann. of Math. (2) 50, 1949, 305—313.
2. А. Г. Постников и Н. П. Романов, Упрощение элементарного доказательства А. Сельберга асимптотического закона распределения простых чисел, Успехи матем. наук 10, вып. 4 (66), 1955, 75—87.
3. А. Е. Ингам, Распределение простых чисел, М.—Л., 1936.

И. И. Пятецкий-Шапиро

2. И. Г. Петровский и Е. М. Ландис. Число предельных циклов дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = \frac{P_2(x, y)}{Q_2(x, y)}$ .

Пусть имеется дифференциальное уравнение

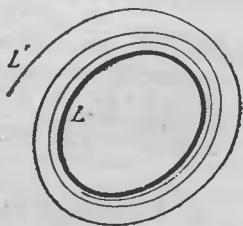
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Замкнутая интегральная кривая  $L$  такого уравнения называется *предельным циклом*, если существует незамкнутая интегральная кривая  $L'$ , такая, что точки  $L$  являются предельными точками для  $L'$ . (В этом случае  $L'$  будет «навиваться» на  $L$ , см. рисунок.) В работе рассматривается уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_2(x, y)}{Q_2(x, y)}, \quad (1)$$

где  $P_2(x, y)$  и  $Q_2(x, y)$  — многочлены второй степени,  $P_2(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ ;  $Q_2(x, y) = A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1$ , и исследуется вопрос о том, сколько предельных циклов может иметь такое уравнение.

Доказывается, что уравнение вида (1) не может иметь более трех предельных циклов. Ранее Н. Н. Баутиным был построен пример уравнения вида (1), имеющего ровно три предельных цикла. Таким образом, эта оценка является точной.



Задача об оценке числа предельных циклов уравнения вида (1) — старая задача, долго не поддававшаяся решению. Ее удалось решить, благодаря новому подходу к вопросу. Если менять коэффициенты многочленов  $P_2$  и  $Q_2$ , т. е. числа  $A, B$  и т. д., то число предельных циклов уравнения (1) может меняться: предельные циклы могут исчезать, могут появляться новые. Но оказывается, если продолжить решение в комплексную область, то каждому предельному циклу будет соответствовать комплексная интегральная кривая с определенными топологическими свойствами — *комплексный цикл*, и число этих комплексных циклов уже не меняется, если изменять коэффициенты многочленов  $P$  и  $Q$  в комплексной области.

Однако комплексный цикл уравнения (1) может не отвечать никакому действительному, т. е. обыкновенному предельному циклу; поэтому число предельных циклов уравнения, вообще говоря, меньше числа комплексных циклов и в крайнем случае может лишь равняться этому числу.

Аналогичное обстоятельство имеет место для корней алгебраического уравнения: число действительных корней уравнения  $P(x) = 0$  при изменении коэффициентов многочлена  $P(x)$  может меняться, но число комплексных корней всегда одинаково; при этом число действительных корней может быть меньше или равно числу комплексных корней.

Удалось произвести подсчет числа комплексных циклов для уравнений, коэффициенты которых мало отличаются от коэффициентов одного, специальным образом выбранного уравнения; это число оказалось равным трем. Так как число действительных предельных циклов ни для какого уравнения не может быть больше этого числа, то этот подсчет и доказывает требуемую теорему<sup>1</sup>).

#### Литература

1. И. Г. Петровский и Е. М. Ландис, О числе предельных циклов уравнения  $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ , где  $P$  и  $Q$  — многочлены 2-й степени, Матем. сборник 37 (79), вып. 2, 1955, 209—250.
2. Н. Н. Баутин, О числе предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра, Матем. сборник 30 (72), 1952, 181—196.

Е. М. Ландис

З. Т. Банг — В. Фенхель. Решение одной задачи о покрытии выпуклых фигур.

Хорошо известна следующая элементарная задача: найти наименьшее число полос ширины 1, которыми можно полностью покрыть круг  $\Sigma$  радиуса  $R$  (рис. 1). Решение этой задачи, принадлежащее как будто,

<sup>1</sup> В самое последнее время получена оценка числа предельных циклов для уравнения  $dy/dx = P_n(x, y)/Q_n(x, y)$ , где  $P_n$  и  $Q_n$  — многочлены  $n$ -го порядка. (И. Г. Петровский и Е. М. Ландис, Доклады АН СССР, 113, № 4, 1957.)

польскому математику Г. Штейнгаузу, состоит в следующем. Рассмотрим сферу, центр и радиус которой совпадают с центром и радиусом  $\Sigma$ , и сопоставим каждой пересекающей  $\Sigma$  полосе  $\sigma$  шаровой пояс (или сегмент, если пересекает круг  $\Sigma$  только одна из ограничивающих  $\sigma$  прямых), ортогональная проекция которого на плоскость круга  $\Sigma$  совпадает с  $\sigma$ . Если полосы  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  ширины 1 полностью покрывают  $\Sigma$ , то отвечающие им шаровые пояса и сегменты полностью покрывают сферу. Но так как поверхность шарового пояса или сегмента равна  $2\pi Rh$ , где  $h$  — высота пояса (сегмента), то все рассматриваемые пояса имеют одинаковую поверхность  $2\pi R$ , а сегменты — поверхность, не превосходящую  $2\pi R$ . Отсюда следует, что если  $n < 2R$ , то рассматриваемые шаровые пояса и сегменты не могут полностью покрыть сферу, поскольку их общая поверхность будет меньше поверхности сферы  $4\pi R^2$ ; следовательно, и полосы  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  не могут полностью покрыть  $\Sigma$ .

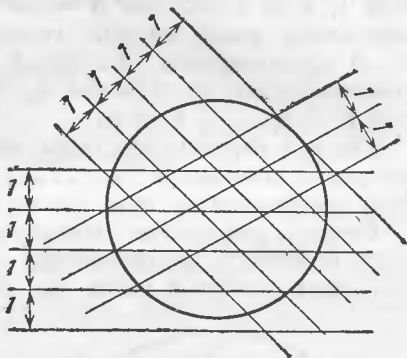


Рис. 1.

Если же  $n \geq 2R$ , то полосами  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ , разумеется, можно покрыть круг  $\Sigma$ ; для этого достаточно, например, приложив эти полосы одну к другой, составить из них более широкую полосу ширины  $n \geq 2R$ .

Это решение без изменений переносится и на тот случай, когда числа  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , выражающие ширину каждой из полос  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ , различны; при этом полосами  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  можно покрыть круг  $\Sigma$  в том и только в том случае, когда  $h_1 + h_2 + \dots + h_n \geq 2R$ .

Приведенная выше задача является частным случаем следующей проблемы дощечек, которую поставил в 1932 г. другой известный польский математик А. Тарский: *каково наименьшее число полос («дощечек») ширины 1, которыми можно покрыть произвольно заданную выпуклую фигуру («яму») F* (или в более общей формулировке: *пусть  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  суть n полос, ширина которых соответственно равна  $h_1, h_2, \dots, h_n$ ; можно ли этими полосами покрыть заданную выпуклую фигуру F?*)<sup>1)</sup>. Ясно, что приведенное выше решение проблемы Тарского для того случая, когда  $F$  есть круг, никак не может быть перенесено, например, на тот случай, когда  $F$  есть треугольник (а тем более на общий случай); здесь необходим какой-то совсем другой подход.

<sup>1)</sup> Требование выпуклости  $F$  здесь является существенным: очевидно, для покрытия произвольной (связной) фигуры может потребоваться значительно меньшее число полос, чем для покрытия ее выпуклой оболочки.



Несмотря на простоту условия «проблемы дощечек», ее довольно долго не удавалось решить. Решение этой проблемы было получено (сразу для  $m$ -мерного случая) только в 1950 г. датским математиком Т. Бангом; в 1951 г. известный датский геометр В. Фенхель еще несколько упростил это решение. Теорема Банга (справедливость которой предполагал еще Тарский) заключается в том, что фигуру  $F$  можно покрыть  $n$  полосами ширины 1, если  $n \geq \Delta$ , где  $\Delta$  — так называемая ширина  $F$ , т. е. ширина самой узкой полосы, которой можно покрыть  $F^1$ ) (в более общей формулировке: фигуру  $F$  в том и только в том случае можно покрыть  $n$  полосами  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  ширины  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , если  $h_1 + h_2 + \dots + h_n \geq \Delta$ ).

Как и в случае круга, ясно, что если  $\Delta \leq n$ , то фигуру  $F$  можно покрыть  $n$  полосами  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  ширины 1; интерес представляет лишь доказательство того, что при  $\Delta > n$  такое покрытие невозможно. Фигуру, получаемую параллельным переносом  $F$  на вектор  $a$ , мы будем обозначать в дальнейшем через  $F_a$ . Нетрудно показать, что если длина вектора  $a$  равна  $1/2$ , а ширина  $F$  равна  $\Delta$ , то ширина пе-

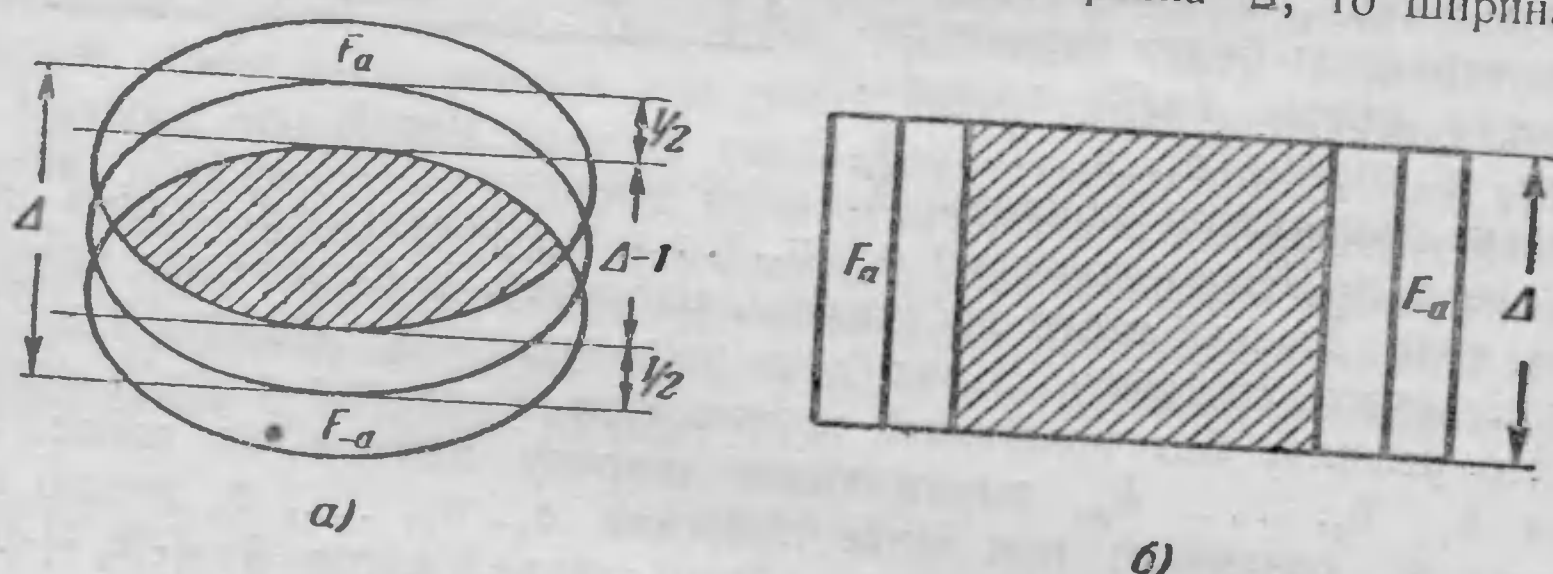


Рис. 2.

ресечения фигур  $F_a$  и  $F_{-a}$  заключается в пределах от  $\Delta - 1$  до  $\Delta$  (рис. 2); отсюда методом математической индукции выводится, что если  $a_1, a_2, \dots, a_n$  суть  $n$  векторов длины  $1/2$ , то ширина пересечения всех фигур

$$F_{\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n}$$

(число этих фигур равно  $2^n$ ) не меньше  $\Delta - n$ ; следовательно, при  $\Delta > n$  это пересечение представляет собой выпуклую фигуру, имеющую внутренние точки. Выберем одну из этих внутренних точек за начало координат; в этом случае концы  $2^n$  векторов  $\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$  все лежат внутри  $F$  и, следовательно, существует такое число  $\lambda > 1$ , что и концы  $2^n$  векторов  $\lambda(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)$  все принадлежат  $F$ . Покажем теперь, что  $n$  полос  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  ширины 1, направления

<sup>1)</sup> Так, например, ширина треугольника равна его наименьшей высоте. (По поводу понятия ширины выпуклой фигуры см., например, И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, М.-Л., Гостехиздат, 1951.)

которых соответственно перпендикулярны к векторам  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , не могут покрыть все эти точки; отсюда, очевидно, будет вытекать теорема Банга.

Пусть уравнения прямых, ограничивающих полосу  $\sigma_1$  в векторной форме, имеют вид

$$a_i r + b_i = \pm a_i^2;$$

в таком случае точка с радиусом-вектором  $R$  будет тогда и только тогда принадлежать  $\sigma_i$ , если

$$|a_i R + b_i| \leq a_i^2.$$

Рассмотрим теперь  $2^n$  выражений

$$\lambda (\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n)^2 + (\varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \dots + \varepsilon_n b_n) \quad (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1)$$

и пусть

$$\lambda (\varepsilon_1^0 a_1 + \varepsilon_2^0 a_2 + \dots + \varepsilon_n^0 a_n)^2 + (\varepsilon_1^0 b_1 + \varepsilon_2^0 b_2 + \dots + \varepsilon_n^0 b_n),$$

— то из них, которое имеет наибольшее значение. Сравнительно несложный подсчет показывает, что

$$\varepsilon_i^0 [a_i \lambda (\varepsilon_1^0 a_1 + \varepsilon_2^0 a_2 + \dots + \varepsilon_n^0 a_n) + b_i] - a_i^2 > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

т. е. что ни одна из полос  $\sigma_i$  не покрывает конца вектора  $\lambda (\varepsilon_1^0 a_1 + \varepsilon_2^0 a_2 + \dots + \varepsilon_n^0 a_n)$ , ч. т. д.

В работе [2], содержащей решение «проблемы дощечек», Банг формулирует также некоторую новую проблему, решение которой в положительном смысле явилось бы усилением найденного им результата. Выше указывалось, что если  $n$  полос  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  ширины  $h_1, h_2, \dots, h_n$  полностью покрывают выпуклую фигуру  $F$ , то

$$\frac{h_1}{\Delta} + \frac{h_2}{\Delta} + \dots + \frac{h_n}{\Delta} \geq 1. \quad (1)$$

Банг указывает, что в определенном смысле более естественно сравнивать ширину  $h_i$  полосы  $\sigma_i$  не с (наименьшей) шириной  $\Delta$  фигуры  $F$ , определяемой покрывающей  $F$  полосой совсем другого направления, а с шириной  $\Delta_i$  фигуры  $F$  в направлении полосы  $\sigma_i$ , т. е. с шириной самой узкой полосы, имеющей то же направление, что и  $\sigma_i$ , целиком покрывающей  $F$ . В связи с этим он предлагает доказать (или опровергнуть) следующую теорему: если  $n$  полос  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  полностью покрывают  $F$ , то

$$\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \dots + \frac{h_n}{\Delta_n} \geq 1; \quad (2)$$

так как  $\Delta \leq \Delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то условие (1), очевидно, вытекает из (2). [Банг замечает также, что с помощью незначительной модификации его доказательства можно вывести, что если полосы  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  полностью покрывают  $F$ , то

$$\frac{h_1}{\Delta^{(1)}} + \frac{h_2}{\Delta^{(2)}} + \dots + \frac{h_n}{\Delta^{(n)}} \geq 1, \quad (3)$$

где  $\Delta^{(i)}$  — «внутренняя ширина»  $F$  в направлении  $\sigma_i$ , т. е. величина самой длинной хорды фигуры  $F$ , перпендикулярной  $\sigma_i$ ; этот результат, очевидно, является промежуточным между (1) и (2).] Отношение  $\frac{h_i}{\Delta_i}$  можно было бы назвать «относительной шириной» полосы  $\sigma_i$ ; неравенство (2), в противоположность (1), имеет аффинный смысл.

В работе [4] Банг критикует некоторые неудачные попытки доказательного результата и указывает на трудности индуктивного подхода к проблеме. Он указывает также, что в случае двух полос ( $n=2$ ; при этом число  $m$  измерений пространства может быть любым) эта проблема сводится к следующей элементарно-геометрической задаче: *через вершины квадрата со стороной 1 вне его проведены 4 произвольные прямые; доказать, что сумма величин, обратных ширинам  $\delta_1$  и  $\delta_2$  образовавшегося четырехугольника в направлениях сторон квадрата, не меньше 1* (рис. 3). Эту весьма нелегкую задачу Банг решает; однако его решение не переносится на трехмерный случай (здесь через вершины единичного куба проводятся плоскости; требуется доказать, что сумма величин, обратных ширинам получившегося восьмигранника в направлениях ребер куба, не меньше 1), а тем более и на  $n$ -мерный случай, к которому сводится поставленная проблема в общем случае.

Указывая на эту и на некоторые другие нерешенные задачи, Банг кончает свою работу [4] цитатой из одной книги Э. Лаидау, которая в переводе гласит: «я хотел бы вложить эти задачи в сердце читателей».

#### Литература

1. Th. Bang, On covering by parallel-strips, Math. Tidsskr. 13, 1950, 49—53.
2. Th. Bang, A solution of the «plank problem», Proc. Amer. Math. Soc. 2, 1951.
3. W. Fenchel, Bang's Solution of the Plank Problem, Math. Tidsskr., 1951, 49—56.
4. Th. Bang, Some remarks on the union on convex bodis, 12 Skand. math. Kongr. Lund, 1953; Lund, 1954, 5—11.

И. М. Яглом

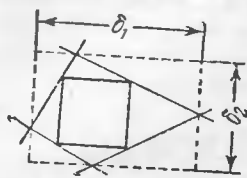


Рис. 3.

# В. ЗАДАЧИ

Под редакцией И. М. Яглома

## От редакции

Отдел «Задачи» сборников «Математическое просвещение» рассчитан на широкий круг читателей — от учащихся старших классов средней школы до преподавателей математики в вузах и научных работников. Цели этого отдела также широки — от заполнения досуга в субботний вечер (задачи типа «математических развлечений») до стимулирования самостоятельной научной работы. Соответственно этому задачи будут охватывать широкий диапазон тем и заметно отличаться одна от другой по степени трудности. Чтобы читателю было легче ориентироваться, отдел «Задачи» будет состоять из нескольких частей: с одной стороны, отдельно будут приводиться «Задачи по элементарной математике», не требующие для решения знаний, выходящих за рамки курса средней школы, и «Задачи по высшей математике»; с другой стороны, все задачи будут делиться на «Задачи средней трудности», «Задачи повышенной трудности» и «Проблемы». Последнее название подразумевает задачи, полное решение которых автору не известно, и предполагается требующим значительных усилий. Что же касается остальных рубрик, то они, разумеется, условны: например, может случиться, что задача «повышенной» трудности на самом деле имеет несложное решение или задача по «элементарной математике» хорошо решается неэлементарными средствами.

Редакция опубликует в последующих выпусках наиболее яркие и оригинальные из присланных решений задач; будут перечислены также все авторы своевременно сообщенных правильных решений. Предлагаемые читателями для помещения в «Математическое просвещение» новые задачи обязательно должны сопровождаться подробным решением, для каждой задачи — на отдельном листе.

## 1. Задачи по элементарной математике

### А. Задачи средней трудности

1. Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . Найти геометрическое место таких точек  $M$  плоскости, что отрезки, отсекаемые на прямых  $MA$  и  $MB$  сторонами треугольника (т. е. отрезки  $AP$  и  $BQ$ , где  $P$  есть точка пересечения  $MA$  и  $BC$ , а  $Q$  — точка пересечения  $MB$  и  $AC$ ), равны.

2. На какое наибольшее число частей могут разбить пространство две замкнутые поверхности, одна из которых является сферой, а вторая — поверхностью куба <sup>1)</sup>? А как будет обстоять дело, если обе они являются поверхностями кубов?

3. Доказать, что если луч отражается по одному разу от каждого из трех попарно-перпендикулярных плоских зеркал, то он меняет свое направление на обратное. Обратно, если произвольный луч после трехкратного отражения от трех плоских зеркал меняет свое направление на обратное, то плоскости этих зеркал попарно перпендикулярны. (Примечание. При отражении от плоского зеркала падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с перпендикуляром к плоскости зеркала, восстановленным в точке падения, и образуют с этим перпендикуляром равные углы.)

Ср. с задачами 3 раздела Б (стр. 221—222).

4. На бесконечной шахматной доске стоит конь. Сколько есть полей, на которых он может оказаться через  $n$  ходов?

*В. А. Залгаллер (Ленинград)*

5. Проезжая в автобусе мимо кинотеатра, некто успел заметить только часы (но не минуты!) начала четырех сеансов:

1-й сеанс — 12 ч. ... м.

2-й сеанс — 13 ч. ... м.

... ..

7-й сеанс — 23 ч. ... м.

8-й сеанс — 24 ч. ... м.

Как по этим данным восстановить начало всех сеансов (предполагается, что продолжительность каждого из восьми сеансов одинакова).

*А. И. Островский (Москва)*

6. Из таблицы

1	2	3	...	$n$
$n+1$	$n+2$	$n+3$	...	$2n$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	...	$3n$
$(n-1)n+1$	$(n-1)n+2$	$(n-1)n+3$	...	$n^2$

выбраны  $n$  чисел так, что никакие два из выбранных чисел не стоят в одной и той же строке или в одном и том же столбце таблицы. Какова сумма выбранных чисел?

<sup>1)</sup> Было бы интересно дополнительно выяснить, на какое вообще число частей могут делить пространство как-то расположенные сфера и поверхность куба (или поверхности двух кубов).

7. Расположенная внутри выпуклого  $n$ -угольника  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  точка  $O$  соединена со всеми вершинами; далее  $n$  сторон  $n$ -угольника произвольным образом нумеруются числами от 1 до  $n$  и независимо от этого  $n$  отрезков  $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$  нумеруются теми же числами, причем никакие две стороны или два отрезка  $OA_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) не получают одинакового номера.

а) При  $n=9$  указать такую нумерацию сторон и отрезков  $OA_i$ , при которой сумма номеров сторон любого из треугольников  $OA_1A_2, OA_2A_3, \dots, OA_nA_1$  будет одна и та же.

б) Доказать, что при  $n=10$  такую нумерацию осуществить нельзя.

8. Из цифр четырехзначного числа  $N$  составляются два новых числа  $M$  и  $m$  — самое большое и самое малое среди чисел, составленных из тех же цифр, что и  $N$ ; далее составляется разность  $N_1 = M - m$ , и с числом  $N_1$  поступают так же, как ранее с числом  $N$ . Докажите, что, повторив некоторое число раз этот процесс, мы обязательно придем к числу 6174<sup>1)</sup>. Каково наименьшее число  $k$  такое, что  $k$ -кратное повторение описанного процесса обязательно приводит к числу 6174?

К какому результату может привести аналогичный процесс, примененный к трехзначному или к пятизначному числу?

В. С. Новикова (Орехово-Зуево)

9. Доказать, что если рациональная функция от  $x$  не меняется при замене  $x$  на  $\frac{1}{x}$ , то она является рациональной функцией от  $x + \frac{1}{x}$ .

10. Доказать, что если окружности, вписанные в два треугольника, на которые разбивается некоторый четырехугольник одной из своих диагоналей, касаются, то будут касаться и окружности, вписанные в треугольники, на которые разбивается этот же четырехугольник второй диагональю.

В. А. Жаров (Ярославль)

## Б. Задачи повышенной трудности

1. Найти  $n$  треугольников наименьшей возможной общей площади, которыми можно полностью покрыть окружность радиуса 1.

2. Какое число точек самопересечения может иметь замкнутый  $n$ -угольник, никакие три вершины которого не лежат на одной прямой?

3. Оптический прибор, называемый *трипельпризмой*, состоит из трех плоских зеркал, образующих прямой трехгранный угол. Этот на-

<sup>1)</sup> В таком виде задача сформулирована в качестве проблемы, решение которой неизвестно, во втором издании книги Б. А. Кордемского «Математическая смекалка», М., 1955; в третьем издании той же книги указано, что решение задачи нашло также Е. Н. Ламбина (Рязань).

бор зеркал отражает каждый падающий на него луч света в направлении, строго противоположном первоначальному (см. задачу 3 раздела А, стр. 220), что позволяет, например, заменить в некоторых случаях осветительную систему маяка трипелъпризмой (которую в этом случае требуется отыскать прожектором с судна). Найти все возможные системы плоских зеркал, отражающие каждый падающий луч в строго противоположном направлении.

4. Если два целых числа дают одинаковые остатки при делении на некоторое третье положительное число  $p$ , то их разность делится на  $p$ ; поэтому если числа  $M$  и  $N$  дают одинаковые остатки при делении на каждое из  $n$  последовательных простых чисел  $2, 3, 5, \dots, p_n$ , то разность  $M - N$  делится на произведение  $2 \cdot 3 \cdot 5 \dots p_n$ . Это обстоятельство позволяет предложить своеобразную «систему счисления», позволяющую записывать большие числа небольшим числом «цифр». А именно, условимся принимать за последнюю «цифру» числа остаток от деления его на 2 (эта «цифра» может иметь значения 0 и 1), за предпоследнюю — остаток от деления числа на 3 (эта «цифра» может иметь значения 0, 1 и 2) и т. д.; при этом, например, с помощью 10 «цифр» можно будет однозначно записать все целые числа от 0 до  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 = 715\,071\,357$ . Эта система счисления имеет то большое достоинство (весьма ценное для использования ее в современных вычислительных машинах), что в ней ни сложение, ни умножение чисел не связаны с операцией «перенесения единиц в следующий разряд»:  $k$ -я «цифра» суммы (или произведения) двух чисел полностью определяется  $k$ -ми «цифрами» слагаемых (множителей) — она равна остатку, который дает при делении на соответствующее простое число  $p_k$  сумма (произведение)  $k$ -х «цифр». Недостатком же этой системы счисления является отсутствие простого правила, позволяющего сравнить два записанных по этой системе числа, т. е. по их «цифрам» определить, какое из них больше.

Требуется найти такое правило.

А. Свобода (Чехословакия). [Занявств.]

5. Как расположить на прямой систему единичных отрезков (длины 1), не пересекающихся и не имеющих общих концов, так, чтобы любая бесконечная «правильная» последовательность точек прямой (т. е. последовательность точек, каждые две соседние из которых удалены одна от другой на одинаковое расстояние) имела бы общую точку хотя бы с одним из отрезков нашей системы.

6. Выписаны подряд две единицы. Между этими двумя единицами вставляем число 2; затем между соседними из написанных, сумма которых равна трем, вставляем число 3; затем между соседними из выписанных чисел, сумма которых равна четырем, вставляем число 4, и т. д. Сколько раз нам придется вставить между выписанными числами число 1000?

7. Пространство разбито на тетраэдры так, что каждые два тетраэдра либо вовсе не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общее целое ребро, либо имеют общую целую грань. Доказать, что если в каждом ребре разбиения сходится четное число тетраэдров, то можно занумеровать все вершины разбиения цифрами 1, 2, 3, 4 так, чтобы четыре вершины каждого тетраэдра оказались занумерованными разными цифрами.

Ср. с проблемой 2 раздела В.

*Е. Б. Дынкин (Москва)*

8. В числовом треугольнике

				1						
				1	1	1				
			1	2	3	2	1			
		1	3	6	7	6	3	1		
	1	4	10	16	19	16	10	4	1	
1	5	15	10	45	51	45	30	15	5	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

каждое число равно сумме трех чисел, стоящих в предыдущей строке непосредственно над ним, справа от него и слева от него. Каковы номера тех строк этого треугольника, в которых ни одно число не делится на 3? А на 5? А на 7?

*Э. Э. Балаш (Москва)*

## В. Проблемы

1. Известно, что плоскость можно покрыть без пробелов и двойных покрытий треугольниками, равными произвольному треугольнику, или четырехугольниками, равными произвольному четырехугольнику; с другой стороны, плоскость нельзя покрыть (даже не обязательно равными!) выпуклыми многоугольниками, число сторон которых больше шести<sup>1)</sup>. Требуется перечислить все виды пятиугольников и шестиугольников такие, что пяти- или шестиугольниками, равными данному, можно покрыть плоскость [так, например, этому условию удовлетворяют все центрально-симметричные шестиугольники<sup>2)</sup>].

Вероятно, целесообразно сначала рассмотреть тот случай, когда заполняющие плоскость многоугольники прилегают друг к другу по целой стороне (но не по части стороны одного из них).

2. Пространство разбито на тетраэдры так, что каждые два тетраэдра либо вовсе не имеют общих точек, либо имеют общую грань,

<sup>1)</sup> См., например, Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, М., 1954; задачи 82а), б), 83 и решения этих задач.

<sup>2)</sup> См. задачу 82в) из той же книги.



либо имеют общее ребро, либо имеют общую вершину. Доказать (или опровергнуть), что все вершины разбиения можно занумеровать шестью цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что все вершины каждого тетраэдра будут занумерованы разными цифрами.

Е. Б. Дынкин (Москва)

## 2. Задачи по высшей математике

### А. Задачи средней трудности

1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{\pi}{x} & \text{при } x \neq 0 \text{ (} n \text{ — целое положительное),} \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что порядок наивысшей существующей производной функции  $f(x)$  в точке  $x=0$  равен  $\frac{n}{2}$  при  $n$  четном и  $\frac{n-1}{2}$  при  $n$  нечетном; при этом в первом случае функция  $f\left(\frac{n}{2}\right)(x)$  будет претерпевать разрыв в точке  $x=0$ , а во втором случае функция  $f\left(\frac{n-1}{2}\right)(x)$  будет непрерывна при всех  $x$ .

2. Вычислить

$$\text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}}{\cos 2x} dx; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 1} e^{\frac{x^4 - 4x + 1}{(x-1)^2}} dx.$$

И. С. Градштейн (Москва)

3. Пусть

$$\xi = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}$$

— бесконечная периодическая цепная дробь ( $b_j$  — натуральные числа) с длиной периода  $n$  ( $b_{j+n} = b_j$ ),

$$r_i = b_j + \frac{1}{b_{j+1} + \frac{1}{b_{j+2} + \dots}}$$

— остатки дроби ( $r_{j+n} = r_j$ ),  $\Pi = r_1 r_2 \dots r_n$  — произведение всех различных остатков. Доказать, что

$$\Pi = Q_{n-1} + Q_n \xi,$$

где  $Q_{n-1}$  и  $Q_n$  — знаменатели  $(n-1)$ -й и  $n$ -й подходящих дробей.

Ф. С. Рофе-Бекетов (Харьков)

4. Доказать, что если отличные от нуля элементы неособенной квадратной матрицы  $A = \|a_{ij}\|$  расположены в шахматном порядке (т. е. ни в одной строке и ни в одном столбце два нуля или два не-нуля не стоят рядом), то и обратная матрица  $A^{-1}$  имеет аналогичное строение.

*Р. А. Минлос (Москва)*

5. Доказать, что если оси двух пересекающихся парабол перпендикулярны, то четыре точки пересечения принадлежат одной окружности.

*З. А. Скопец (Ярославль)*

6. Пусть  $M$  — точка, симметричная точке пересечения диагоналей произвольного четырехугольника  $ABCD$  относительно середины отрезка  $EF$ , соединяющего середины диагоналей;  $l$  — прямая, параллельная  $EF$ , проходящая через точку  $M$ . Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный между диагональю  $AC$  и стороной  $AB$ , равен отрезку прямой  $l$ , заключенному между диагональю  $BD$  и стороной  $CD$ .

*З. А. Скопец (Ярославль)*

7. Доказать, что ряд

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{4}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

расходится.

8. Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — такие  $n$  точек, принадлежащие поверхности эллипсоида  $n$ -мерного евклидова пространства

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2 = 1$$

с центром в начале координат  $O$ , что  $n$ -мерные векторы  $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_n}$  попарно перпендикулярны. Доказать, что сумма  $\overline{OA_1}^2 + \overline{OA_2}^2 + \dots + \overline{OA_n}^2$  не превосходит  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ .

9. Доказать, что в  $n$ -мерном евклидовом пространстве не существует  $n+2$  векторов, образующих попарно тупые углы.

10. Пусть кривая  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  (функции  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют непрерывные вторые производные) имеет в точке  $B$  радиус кривизны  $\rho$ . Обозначим через  $r$  радиус окружности, описанной вокруг треугольника, образованного касательными к рассматриваемой кривой в точках  $A, B$  и  $C$ ;  $A$  и  $C$  лежат по разные стороны от  $B$ .

Найти предел, к которому стремится величина  $r$ , когда  $A$  и  $C$  стремятся к  $B$ .

## Б. Задачи повышенной трудности

1. Пусть  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  — два независимых комплексных переменных. Гиперповерхность

$$\operatorname{Re}(z_1^m z_2^n) = 0 \quad (m, n — \text{целые положительные})$$

делит четырехмерное пространство  $(x_1, y_1, x_2, y_2)$  на ряд частей. На сколько именно?

*Р. А. Минлос (Москва)*

2. Пусть  $N(a_1, a_2, \dots, a_n, M)$  есть число решений в целых положительных числах неопределенного уравнения

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = M,$$

где  $a_1, \dots, a_n$  — целые положительные числа, взаимно простые между собой. Доказать, что при большом  $M$  число  $N$  имеет порядок

$$\frac{M^{n-1}}{(n-1)! a_1 a_2 \dots a_n}$$

(т. е. что  $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{N(a_1, a_2, \dots, a_n, M)}{M^{n-1}} = (n-1)! a_1 a_2 \dots a_n$ ).

*А. О. Гельфонд (Москва)*

3. Доказать тождество

$$\int_0^\infty [(x+1)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}]^2 dx = -\frac{1}{2\alpha-1} - \frac{2\Gamma(\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \left(\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\right),$$

где  $\Gamma(\alpha)$  — гамма-функция Эйлера.

Вычислить более общий интеграл

$$\int_0^\infty [(x+1)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}]^n dx$$

( $n$  — целое положительное) для тех значений  $\alpha$ , для которых этот интеграл сходится.

*А. М. Яглом (Москва)*

4. Найти сумму

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{31} + \dots = \sum' \frac{1}{n-1},$$

где штрих означает, что суммирование распространяется по всем целым положительным числам  $n$ , являющимся целыми степенями (порядка выше единицы) целых чисел.

5. Найти все аналитические функции  $f(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$ , удовлетворяющие условию

$$|f(x + iy)| = |f(x) + f(iy)|.$$

*Р. М. Робинсон (США) [Заимств.]*

6. Доказать, что если непрерывная функция  $f(x, y)$  двух переменных  $x$  и  $y$  при любом фиксированном  $x$  — многочлен относительно  $y$  и при любом фиксированном  $y$  — многочлен относительно  $x$ , то эта функция является многочленом от двух переменных  $x$  и  $y$ .

7. Пусть на главной диагонали определителя  $n$ -го порядка стоит число  $x$ , а на всех остальных местах — либо  $+1$ , либо  $-1$ . Найти наименьшее такое положительное число  $a$ , что при всех  $x > a$  определитель будет положительным при любом выборе знаков  $+$  и  $-$ .

8. Как найти среди всех неотрицательных функций  $y(x)$ , удовлетворяющих условию  $\int_{-\infty}^{+\infty} y(x) dx = 1$ , такую, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{y} \sin \frac{1}{1+x^4} y dx$$

имеет наибольшее возможное значение?

## В. Проблемы

1. В евклидовом пространстве найти все поверхности, обладающие (в малом) следующим свойством: любая хорда образует равные углы с полунормальями, проведенными в концах хорды по одну сторону от поверхности (пример: сфера).

Автором задачи получено полное ее решение кружным путем как побочный продукт в исследовании, где эта задача являлась деталью. Можно ожидать, что существует более прямое и простое решение, какое и предлагается найти.

В пространствах гиперболическом (Лобачевского) и эллиптическом для той же задачи найдены частные решения, но вопрос об общем решении остается открытым.

*Я. С. Дубнов (Москва)*

2. Согласно известной теореме Вейерштрасса всякая заданная на отрезке  $[0, 1]$  непрерывная функция может быть равномерно приближена многочленами (см., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс математического анализа, т. III, М.-Л., 1949, стр. 700). Спрашивается, какие заданные на том же отрезке функции могут быть равномерно приближены многочленами с равномерно ограниченными коэффициентами?

Нетрудно показать, что все такие функции должны быть аналитическими.

*С. Б. Стечкин (Москва)*

с помощью  $O_0$  точки  $P_0$  и  $A_1$ ; легко понять, что  $OA_2 = xp_1$ ; отложив на оси  $OY$  отрезок  $A_2O_2 = a_2$  ( $A_2\vec{O}_2 = \vec{OM} \cdot a_2$ ) получим  $OO_2 = p_2$ .

4°. Продолжая аналогичным образом, т. е. используя очередную найденную точку  $O_k$ , отложим отрезок  $A_kO_k = a_k$  и получим (указанным выше построением)  $OO_k = p_k$ .

Последний шаг нашего графического построения даст  $OO_n = p_n = f(x)$ .

Вычисление значения  $f(x')$  потребует, очевидно, предварительного построения (см. п. 1°) новой «основной, прямой»  $OP'$ , соответствующей числу  $x'$ .

Все указанные построения легко и быстро выполняются либо с помощью существующих чертежных устройств (например, аппарата Кульмана), либо с помощью хорошей рейсшины и наугольника. Они могут быть хорошо выполнены также и на миллиметровой бумаге — с помощью только линейки.

Автор описанной графической схемы (J. E. Plainevaux, *Zeitschrift für angewandte Math. u. Mech.*, т. 36 (1956) указывает, что в его книге «*Éléments de calcul graphique*» (изд. «*Revue de l'École Polytechnique*», Bruxelles, 1955) приведены аналогичные графические схемы (использующие только проведение прямых, параллельных двум исходным взаимно ортогональным прямым) для нахождения решения системы линейных алгебраических уравнений, среднего значения функции, для графического интегрирования и т. п.

А. Л.

---

## VI. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

---

### ИЗДАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ГОСТЕХИЗДАТОМ ЗА 25 ЛЕТ

*В. Б. Орлов*

(Москва)

1. Началом деятельности современного Гостехиздата<sup>1)</sup> следует считать 1931 г. За четверть века, прошедшие с этого момента, Издательство подвергалось ряду различных изменений и реорганизаций. Но в основном лицо его определилось уже тогда. Главной задачей Технико-теоретического издательства, выделенного из состава Госиздата, стало издание литературы по физико-математическому комплексу наук.

Значительно менее определенной была тематика Гостехиздата (Государственного технического издательства), существовавшего в 20-х годах. Это издательство выпускало книги как по самым разнообразным вопросам техники, так и по прикладной математике, физике и химии. Существование издательства со столь широким профилем было оправдано лишь в начале развития издательского дела в СССР.

Переход к более высокому этапу связан с годами первой пятилетки, когда резко увеличилась потребность в научно-технической книге и повысились требования к ее качеству и ассортименту. В результате был создан ряд отраслевых технических издательств, а выпуск литературы по физико-математическим наукам — этой главной теоретической основе современной техники — стал делом самостоятельного издательства.

Нужно заметить, что предшественником ГТТИ было не столько Государственное техническое издательство, сколько возглавлявшийся В. Ф. Каганом научный отдел Госиздата, «портфели» которого перешли «по наследству» к ГТТИ. Именно этот запас договоров, рукописей и переизданий помог без задержки организовать подъем выпуска физико-математической литературы, которым было отмечено начало 30-х годов.

2. Математическая книга всегда по праву занимала почетное место в продукции Гостехиздата. За 1931—1956 г. Издательством было выпу-

---

<sup>1)</sup> Сокращенное название Государственного издательства технико-теоретической литературы. Это сокращение является крайне неудачным, так как из него выпал наиболее существенный элемент «теоретический». В 1931 г. издательство сокращению называлось ГТТИ.

щено более 700 новых названий книг по математике. Если учесть переиздания, то это число значительно возрастет, так как большое количество книг издавалось многократно. Конечно, приведенный подсчет весьма приблизителен. Математические методы до такой степени пронизывают собой всё современное естествознание, что не всегда легко определить грань между математическими и нематематическими книгами. В связи с этим указанная цифра, быть может, несколько преуменьшена.

В составе Издательства с самого начала существовала редакция математической литературы. Однако ряд книг по математике выпускался редакцией истории естествознания (впоследствии разделенной между другими редакциями). Некоторые математические книги прикладного характера готовились к печати в редакциях физики, механики и астрономии.

3. Характерным для Гостехиздата является не только большое количество названий, но и разнообразие типов выпускаемой математической литературы. Выпуск учебной литературы, справочников, научных трудов и научно-популярных книг, издание переводов и оригинальных работ объединены вместе. Математическая литература других издательств значительно более типизирована. В издательстве Академии наук преобладают труды научных институтов и собрания сочинений. Издательство иностранной литературы выпускает лишь переводы и притом наиболее новых книг. Учпедгиз и «Советская наука» издают лишь книги учебного и методического характера.

Опыт работы Гостехиздата показал, что взаимодействие в подготовке научной, учебной, справочной и научно-популярной литературы по математике приносит ощутимую пользу. Однако с ростом выпуска книг объединение различных типов литературы в одной редакции становится все более сложным.

Сделаем обзор выпуска математических книг Гостехиздатом по типам литературы.

### Учебная литература

4. Кроме Гостехиздата, выпуском учебной литературы по математике занимается и ряд других издательств. Крупнейшее из них — Учпедгиз, призванный в основном обеспечивать потребности средней школы и педвузов. Ряд книг для вузов, техникумов и других учебных заведений выпускается издательством «Советская наука», Трудрезервиздатом, издательствами крупных вузов и некоторыми отраслевыми издательствами.

В выпуске математической литературы для университетов, различных видов вузов и техникумов Гостехиздат занимает ведущее место. В то же время большое количество изданий Гостехиздата адресовано учащимся и преподавателям педвузов, средней школы, других типов учебных заведений, а также лицам, самостоятельно занимающимся теми или иными разделами математики. Вся система народного образования в нашей стране является единым целым. Поэтому достаточно широкое развертывание

издания учебной литературы для вузов требует и внесения известного вклада в выпуск книг для средней школы, в общее дело повышения математической культуры. Значительная часть таких книг относится к типу научно-популярной литературы, но многие носят учебный характер.

**5.** Является ли такое «вторжение в чужую область» допустимым с точки зрения обеспечения стабильности учебников? Этот вопрос стоит того, чтобы на нем остановиться подробнее. Нельзя, конечно, отрицать того, что наличие учебника и задачника, сохраняющих стабильность в течение ряда лет, значительно облегчает труд основной массы преподавателей. И всё же это совсем не исключает существования и использования одновременно со стабильным рядом различных учебников того же профиля. Более того, опыт показывает, что разнообразие учебной литературы является в конечном счете необходимым.

В самом деле, нельзя забывать, что стабильный учебник не может быть вечным. Прогресс науки, усовершенствование методики, изменение уровня подготовки учащихся, изменение требований к математическому образованию со стороны смежных дисциплин — всё это делает неизбежной периодическую замену (или коренную переработку) основного учебника. А можно ли успешно провести такое дело без предварительных поисков лучших способов изложения в разных направлениях и без заблаговременного испытания на практике различных методов? Такой подход мог бы увенчаться успехом разве лишь случайно. Очевидно также, что дело совершенствования учебной литературы может только выиграть от привлечения к нему более широкого круга авторов (разумеется, достаточно компетентных).

Есть и другое обстоятельство, которое играет здесь существенную роль. Нельзя рассматривать всех преподавателей или учащихся как безликую массу, ориентируясь только на мифического «среднего» учителя или школьника. Потребности учебных заведений одного и того же типа могут быть различными, и это также должно быть учтено.

Все указанные соображения еще резче выражены в жизни высшей школы, и потому понятно, что Гостехиздат с самого начала стал на путь создания возможно более богатого выбора учебной литературы, заботясь в то же время об обеспечении всех математических дисциплин основными учебниками.

**6.** В начале 30-х годов большинство математических курсов в вузах не было обеспечено современной учебной литературой на русском языке, если не считать малотиражных изданий конспектов лекций. Сравнительно благополучно обстояло дело только с аналитической геометрией, начертательной геометрией, дифференциальным и интегральным исчислением, теорией обыкновенных дифференциальных уравнений и теорией функций комплексного переменного.

Некоторые из учебников по этим дисциплинам, возникшие еще в Госиздате, оказались жизнеспособными и многократно переиздавались, иногда значительно видоизменяясь. Сюда относятся известные курсы



Привалова по аналитической геометрии и теории функций комплексного переменного, курс Грэнвилля и Лузина, учебник Пальшау по начертательной геометрии и три переводные книжки Филиппа. Сохранил свою популярность до наших дней задачник Цубербиллер. Если к этому добавить, что Госиздат выпустил первые два тома курса высшей математики Смирнова, а также начал издание задачника 10 авторов, впоследствии переработанного Гюнтером и Кузьминым, то этим будет почти исчерпано наследство, полученное ГТТИ.

7. Создание полного комплекса учебников и задачников по математике для вузов — такова была первая неотложная задача, вставшая перед новым издательством. На первых порах значительную помощь оказали переводы лучших книг мировой учебной литературы. Существенную роль в преподавании сыграли курсы Валле-Пуссена, Гурса, Куранта, Бляшке, Гурвица, Уиттекера и Ватсона, Скарборо, Цейтена и др. В дальнейшем полноценные отечественные книги, созданные почти по всем математическим дисциплинам, вытеснили переводы в качестве основных учебников.

Были заново обеспечены учебной литературой основные университетские и педвузовские курсы высшей алгебры (Сушкевич, Окунев, Курош), дифференциальной геометрии (Рашевский, Фиников), проективной геометрии и оснований геометрии (Глаголев, Ефимов), уравнений математической физики (Кошляков, Петровский, Соболев), теории функций действительного переменного (Александров и Колмогоров, Натансон), теории вероятностей (Бернштейн, Гливенко, Гнеденко), интегральных уравнений (Петровский), теории чисел (Виноградов), вариационного исчисления (Лаврентьев и Люстерник, Ахиезер) и др. Был создан ряд учебников для вузов различного профиля, а также полный набор учебников по математическим дисциплинам для техникумов. Наконец, широко развернулось издание задачников по различным дисциплинам для всех перечисленных типов учебных заведений.

В настоящее время создание комплекса учебников и задачников по всем математическим дисциплинам в основном завершено. Остались лишь отдельные пробелы вроде отсутствия курса истории математики. Разумеется, необходимо вести работу над учебной литературой по новым дисциплинам, которые приобрели важное значение в последние годы и пробивают себе дорогу в учебные планы. Здесь надо иметь в виду прежде всего функциональный анализ, машинную математику, математическую логику.

И всё же сейчас уже имеется возможность основное внимание переключить на вторую важную задачу — совершенствование существующего комплекса учебной литературы, дальнейшее повышение ее качества, поиски новых путей и форм изложения.

8. Вопросу о качестве учебной литературы, об ее наилучшем соответствии задачам преподавания Издательство всегда уделяло большое внимание. Эта работа шла как путем совершенствования основных учеб-

ников от издания к изданию, так и путем создания новых учебников. Достаточно сравнить старые издания таких учебников, как «Аналитическая геометрия» Привалова, с последними, чтобы увидеть, какая большая работа была здесь проделана. И в то же время наряду с книгой Привалова был выпущен и более современный курс Ефимова, завоевавший определенные позиции в преподавании. Точно так же, несмотря на наличие учебных пособий по математическому анализу для университетов и педвузов, Издательство уже в послевоенные годы выпустило новые учебники таких крупнейших специалистов, как Фихтенгольц и Хинчин. Эти учебники сразу же приобрели широкую популярность.

Учебная литература отечественных авторов не только завоевала господствующее место у нас в стране, но и вышла на мировой книжный рынок. Лучшие учебные книги Гостехиздата переведены в Англии, Германии, Польше, Чехословакии, Китае и многих других странах, получив высокую оценку.

В то же время Издательство стремится расширять выпуск переводной учебной литературы, имея в виду, что совершенствование и пополнение существующего комплекса учебников требуют обязательного использования всего мирового опыта преподавания математики.

**9.** Учебная литература представляет большое разнообразие не только по тематике, но и по характеру изложения. Интересно рассмотреть основные встречающиеся типы книг.

Гостехиздатом издана целая группа кратких учебников по различным дисциплинам. Сюда можно отнести три книги Петровского по обыкновенным дифференциальным уравнениям, уравнениям в частных производных и интегральным уравнениям. Того же типа учебники Виноградова по теории чисел и Ахиезера по вариационному исчислению. Написанные крупными учеными на высоком научном уровне, эти книги в сжатой форме излагают весьма богатый материал. Они получили высокую оценку математической общественности у нас и за рубежом.

Однако ограничиться лишь книгами упомянутого типа оказывается невозможным. Для многих учащихся, в особенности занимающихся самостоятельно, сжатость изложения создает существенные трудности в усвоении материала. Не случайно наряду с книгой Петровского большой популярностью пользуется «Курс дифференциальных уравнений» Степанова. Учебники Фихтенгольца, Рашевского, Гнеденко и многие другие также отличаются значительно большей обстоятельностью изложения. Пожалуй, к этой группе принадлежит основная масса учебной литературы.

Наконец, можно выделить еще один тип учебных книг, отличающихся стремлением к возможно большей полноте содержания, охвату широкого круга вопросов, связанных с данным предметом. Эти своего рода «энциклопедии» играют, быть может, более справочную, чем учебную роль, но и они составляют необходимое звено в учебной литературе.

Пяти томный курс Смирнова, трех томный «Курс дифференциального и интегрального исчисления» Фихтенгольца, «Теория аналитических функций» Маркушевича — типичные представители этого рода книг.

10. Сосуществование различных типов учебных книг по одному и тому же предмету в значительной мере объясняется, как уже упоминалось выше, необходимостью удовлетворить запросы различных групп учащихся (и преподавателей). Пожалуй, наибольшего внимания со стороны Издательства требуют при этом заочники и лица, занимающиеся самостоятельно. Большинство их сильно ограничено временем, имеет менее высокий уровень подготовки и меньше возможностей пользоваться консультацией специалистов.

Существует особый тип изданий, предназначенных для лиц, занимающихся в основном без помощи преподавателя, — всякого рода методические указания, письма, разработки к определенным учебникам, задания и т. п. Эта литература, «организующая» процесс изучения, вводящая его в определенные жесткие рамки, необходима для тех, кто не имеет достаточного опыта самостоятельной работы над книгой. В начале 30-х годов подобные издания, к которым можно также отнести «стенограммы лекций» и «вопросники», имели значительно больший удельный вес, чем теперь. Они использовались не только при заочном обучении. В те времена и Гостехиздат отдал некоторую дань этой литературе. Однако очень скоро (и это вполне закономерно) выпуск всех изданий такого характера полностью сосредоточился в руках самих вузов и Министерства высшего образования.

И всё же задача обеспечения литературой учащихся, занимающихся самостоятельно, касается и Гостехиздата. Для него это выражается прежде всего в необходимости особой заботы о стиле, о доступности изложения.

Многие книги Издательства являются вполне пригодными для использования в заочных вузах различного профиля. Среди таких книг можно назвать учебники Фихтенгольца, Хинчина, Привалова, Гордона и Семенцова-Огиевского и др.

Издательство и авторы учебников постоянно ведут работу по совершенствованию изложения учебников от издания к изданию. Так, например, в результате существенной переработки значительно увеличилось возможности использования таких ценных книг, как «Курс высшей алгебры» Куроша и «Курс математического анализа» Берманта.

11. Заботясь о тех, кому усвоение материала дается с наибольшим трудом, Издательство не должно забывать и о других слоях учащихся. Во всех типах учебных заведений значительная часть учащейся молодежи стремится к расширению и углублению знаний, получаемых в результате усвоения обязательной программы. Здесь надо иметь в виду прежде всего две категории учащихся: а) школьников старших классов, желающих в дальнейшем специализироваться по математике или смеж-

ным с ней наукам; б) студентов, желающих вести научную работу, и аспирантов.

В первую очередь именно этим читателям адресована выпускаемая Гостехиздатом учебная литература повышенного типа. Но, конечно, неверно было бы думать, что эта литература ставит своей единственной целью только заполнить разрыв между вузовскими учебниками и научными монографиями или помочь школьникам преодолеть скачок от элементарной математики к высшей. Содействие общему повышению математической культуры учащихся и учащихся, «разведка» путей для будущего повышения уровня преподавания — тоже немаловажные задачи.

Совершенно естественно, что значительную долю учебной литературы повышенного типа составляют сборники трудных задач, снабженные указаниями и частично решениями для возможности самопроверки. Многие из содержащихся в таких сборниках задач представляют и теоретический интерес. Основная цель этих книг — способствовать активному, творческому овладению методами различных математических областей. Происхождение и характер таких сборников очень различны. По элементарной математике имеются, с одной стороны, алгебраический задачник Кречмара и геометрический Делоне и Житомирского, а с другой стороны, «всеобъемлющий» сборник задач Антонова, Выгодского, Никитина и Санкина. По высшей математике следует отметить перевод двухтомного сборника Поля и Сега «Задачи и теоремы из анализа», «Проективную геометрию в задачах» Житомирского, «Сборник задач по математической физике» Лебедева, Скальской и Уфлянда. (Книги серии «Библиотека математического кружка», посвященные различным вопросам элементарной и высшей математики, будут рассмотрены ниже.)

К учебной литературе повышенного типа можно отнести также ряд фундаментальных руководств, о которых шла речь в конце п. 9, и различные специальные курсы, более или менее приближающиеся к научным монографиям.

Особняком стоит ещё не завершённое издание «Энциклопедии элементарной математики», которая ставит своей целью дать систематическое изложение научных основ школьного предмета математики, рассчитанное в основном на учителей и студентов педвузов.

## Научная литература

12. Принципы объединения материала в научной книге могут быть весьма различными. Можно, например, собрать вместе все (или важнейшие) работы одного автора или сотрудников одной и той же научной организации, иногда весьма непохожие по своему характеру и слабо связанные друг с другом. Такое объединение «по авторам» проводится в значительной части книжной продукции Издательства АН СССР, на которое возложен выпуск трудов многочисленных научных институтов и учреждений Академии, а также сочинений крупных ученых. Напротив, Гостехиздат стремится в подавляющем большинстве своих изданий

к тому, чтобы материал книги объединялся не только личностью автора, но и имел внутреннее (тематическое и структурное) единство.

Разумеется, среди изданий АН СССР имеется немало книг и с «тематическим» объединением материала. Что же касается Гостехиздата, то (не считая изданий классиков) он делает единственное отступление от своих правил, выпуская «Труды Московского математического общества». Для такого исключения имеются достаточно веские основания, так как Общество является весьма широкой и авторитетной математической организацией с большими традициями, на заседаниях которой докладываются крупнейшие научные результаты, полученные математиками не только Москвы, но и других городов. Обсуждение и критика продукции и планов Гостехиздата на заседаниях Общества играют существенную роль в деятельности Издательства.

13. Самым примитивным способом тематического объединения материала является просто издание тематических сборников статей. Гостехиздатом выпускались сборники по монографии (1935), теории групп (1937), векторному и тензорному анализу (1933—1952, девять выпусков), начертательной геометрии (1947 и 1955). Такого рода «полуфабрикаты» имеют очень небольшой удельный вес в продукции Издательства, так как они в большинстве случаев представляют интерес для сравнительно незначительного круга читателей и в то же время очень сложны в подготовке (если, конечно, не ограничиваться уже ранее опубликованными статьями и не отказываться от чтения корректур авторами).

И все же этот вид литературы также является необходимой ступенью на пути к созданию обобщающих работ. Систематическое издание таких сборников может иногда восполнять недостаток журнальных публикаций по той или иной важной теме. Сборники трудов семинара по векторному и тензорному анализу (при МГУ) приобрели большое международное значение, и их издание продолжается Издательством Московского университета.

Одним из наиболее удачных изданий подобного рода оказались «Историко-математические исследования», выходящие ежегодно с 1948 г. При общем недостатке литературы по истории математики они играют особенно существенную роль, публикуя научные исследования в этой области, исторические документы, переводы классических работ с комментариями и другие важные материалы. Это издание собрало вокруг себя значительный актив и завоевало признание математиков различных специальностей.

14. Возникновение новых многообещающих направлений исследования всегда вызывает на определенной стадии потребность в создании обобщающей монографии. Наука — дело коллективное, всестороннее развитие важного направления требует усилий многих исследователей, а полученные результаты могут пригодиться большому кругу работников. Однако «войти» в новую область на первых порах не так легко. Име-

иющиеся работы разбросаны по различным журналам, многие еще не опубликованы, они весьма разношерстны, выяснение отношений между их результатами иногда очень трудоемко. Многие выводы «носятся в воздухе», но еще не сделаны, многие задачи еще не сформулированы. Обобщение накопленного материала может в этом случае оказать существенную помощь развитию науки.

Такое обобщение может быть опубликовано в форме обзора в журнале. Многие монографии рассматриваемого типа возникают первоначально в виде таких именно обзоров. Вот почему очень удачной оказалась идея связать выпуск серии монографий «Современные проблемы математики» с журналом «Успехи математических наук». Отбор рукописей для издания в серии и общее руководство ею осуществляет в настоящее время редколлегия журнала.

Выпуск серии начался в 1950 г. и к 1956 г. было издано семь книг, в которых затронуты вопросы геометрии, теории функций, функционального анализа и теории дифференциальных уравнений. Среди последних книг серии отметим монографию Витушкина «О многомерных вариациях» и труд Красносельского в области нелинейного анализа.

Разумеется, издание монографий, обобщающих новые исследования, не ограничивается указанной серией. Можно назвать множество и других книг аналогичного типа, изданных в различные годы, например монографии Векуа «Новые методы решения эллиптических уравнений» (1948), Канторовича, Вулиха и Пинскера «Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах» (1950), Наймарка «Линейные дифференциальные операторы» (1956), Вайнберга «Вариационные методы исследования нелинейных операторов» (1956) и др.

**15.** От только что рассмотренного типа монографий, излагающих в основном новые исследования и посвященных сравнительно узким направлениям, существенно отличаются книги с более широким охватом материала, подробно трактующие целые отрасли математики, вполне сложившиеся и широко разросшиеся, с многообразными выходами в другие области.

Подобные книги создаются нелегко, многолетним трудом крупных ученых. Но они интересны более широкому кругу математиков, работающих в различных областях, а зачастую и специалистам в смежных отраслях науки. Удачные монографии этого типа на многие годы становятся настольными книгами для всех работников науки, деятельность которых сопрягается с данной областью. Именно эти монографии пользуются наибольшим спросом и с течением времени переиздаются, обычно значительно изменяя свое лицо в соответствии с развитием науки.

В активе Гостехиздата есть ряд таких книг. К ним можно отнести, например, монографии Гантмахера «Теория матриц», Гончарова «Интерполирование и приближение функций», Кагана «Основы теории поверхностей», Куроша «Теория групп», Мусхелишвили «Сингулярные инте-

гральные уравнения», Немыцкого и Степанова «Качественная теория дифференциальных уравнений», Понтрягина «Непрерывные группы» и др. Перечисленные книги выбраны из многих, не менее достойных упоминания, почти наудачу, но и этот неполный список показывает, что такого рода литература довольно богата.

Можно еще добавить, что ряд изданных Гостехиздатом переводов тоже принадлежит к рассматриваемому виду монографий. Широко известны, например, книги Ван-дер-Вардена «Современная алгебра», Хаусдорфа «Теория множеств» и многие другие.

Однако говорить о хотя бы приблизительно полном охвате всех отраслей математики пока еще не приходится. В 1936—1938 гг. Издательством была предпринята попытка издания серии «Математика в монографиях». В ней приняли участие такие крупные ученые, как Бернштейн, Венков, Колмогоров, Понтрягин, Привалов, Хинчин, Чеботарев. Всего было выпущено восемь книг, каждая из которых являлась значительным событием в издании научной литературы. И всё-таки создание «математической энциклопедии» из монографий оказалось слишком трудным и завершить его не удалось. Это — дело будущего.

16. Разумеется, резких границ между рассмотренными типами научных книг не существует. Многие монографии являются «переходом» от одного типа к другому. Ряд книг вообще не укладывается в приведенную классификацию.

Отметим своеобразную группу монографий, ставящих своей целью дать сравнительно беглый обзор методов и достижений какой-либо отрасли математики, не вдаваясь в детали, чтобы более выпукло представить общую картину состояния науки. Такие небольшие монографии входили в серию «Современная математика», издававшуюся в 1932—1936 гг. Среди них были книги крупных советских ученых: Бернштейна, Кагана, Лузина, Хинчина, возникшие частично на основе обзорных докладов, сделанных на I Всесоюзном математическом съезде (по теории вероятностей, римановой геометрии, теории функций действительного переменного). В серию вошли также переводы книг Бора, Ингама, Каратеодори, Картана.

17. Издательство всегда уделяло значительное внимание разнообразным прикладным вопросам, учитывая интересы специалистов смежных областей и математиков, работающих в области приложений.

Ряд математических книг вышел в серии «Физико-математическая библиотека инженера», основанной в 1946 г. и включающей в себя также книги по физике и механике. Дифференциальные и интегральные уравнения, специальные функции, операционное исчисление, вариационные методы, методы теории функций комплексного переменного, ряды Фурье, графическая и вычислительная математика — вот круг вопросов, имеющих важные приложения в технике и освещенных (в той или иной мере) в книгах серии. Надо, впрочем, отметить, что значительная часть книг

серии имеет в виду наиболее квалифицированных специалистов в области техники и мало доступна рядовым инженерам.

В связи с бурным развитием вычислительной, в частности машинной, математики Издательство начало в последние годы выпуск новой серии «Библиотека вычислительной математики и прикладного анализа», издаваемой под общим руководством кафедры вычислительной математики МГУ. В серии вышли книги Салехова «Вычисление рядов», Рябенского и Филиппова «Устойчивость разностных уравнений», Хованского «Приложение непрерывных дробей и их обобщений к вопросам анализа».

18. Следует остановиться также на издании классической литературы. С первых лет своего существования Гостехиздат вел серьезную работу по воспроизведению трудов основоположного значения математиков прошлых эпох. Греческая и арабская математика, работы, положившие начало классическому анализу бесконечно малых и его приложениям, труды крупнейших ученых XIX и XX вв. — таков диапазон этой работы. Некоторые древние рукописи ученых, писавших на арабском языке, имеющие существенное значение для понимания хода развития математики, были впервые напечатаны в «Историко-математических исследованиях». Но значение издания классиков не ограничивается тем, что становятся доступными источники для изучения истории математики.

Далеко не всякая математическая мысль сразу же получает всестороннее развитие. Иногда она остается непонятой современниками, и только последующие поколения по-настоящему оценивают и используют ее. Поэтому постоянный критический пересмотр с позиций современной науки математического наследия крупнейших ученых прошлого важен не только для истории математики, но и для развития самой математики.

Формы издания классических произведений весьма различны.

В первую очередь следует назвать полное собрание сочинений Лобачевского (вышло пять томов, шестой — последний — готовится к печати). Это фундаментальное, тщательно комментированное издание имело огромное значение в деле распространения идей Лобачевского. Широкое развитие получила серия «Классики естествознания», в которой были выпущены произведения Архимеда, Евклида, Декарта, Ньютона, Кеплера, Эйлера, Галуа, Больана, Лобачевского, Гильберта, Пуанкаре, Римана и многих других. Ряд классических работ был выпущен вне серии. Некоторые труды выдающихся русских ученых выпускаются в серии «Библиотека русской науки». Особый интерес представляет выпуск тематических сборников, в которых собраны классические работы по какой-либо отрасли математики. Такого рода сборник «Об основаниях геометрии» издан в 1956 г.

19. Книги по истории математики, выпущенные Гостехиздатом, весьма разнообразны. Если не говорить об «Историко-математических исследованиях», подробно рассмотренных выше, то можно назвать несколько книг, посвященных творчеству выдающихся математиков (Архимеда,



Лобачевского, Остроградского, Ковалевской и др.), книги по истории отдельных отраслей математики (Маркушевича — по истории теории аналитических функций и перевод книги Стройка — по истории дифференциальной геометрии), книги о некоторых периодах развития математики или ее отраслей («Арифметика и алгебра в древнем мире» Выгодского, «Лекции о развитии математики в XIX столетии Клейна»), книгу Гнеденко «Очерки по истории математики в России» и др.

Важную роль сыграли справочно-библиографические издания «Математика в СССР за XV лет» и особенно «Математика в СССР за XXX лет», содержащие колоссальный фактический материал.

### Справочная литература

20. В математике, как и в других науках, существует значительная потребность в справочниках различного рода. Определения, терминология, обозначения, формулы, значения различных постоянных, таблицы значений всевозможных функций, графики, кривые, номограммы, разного рода формулировки, правила и алгоритмы — вот материал, который может составлять содержание справочников.

Справочники можно классифицировать по характеру содержащегося в них материала (он может быть по преимуществу числовой, формульный, графический и словесный), по назначению (в зависимости от категории читателей), по теме. Гостехиздатом выпускались самые разнородные математические справочники; однако с течением времени издание некоторых видов их сосредоточилось в других издательствах, имеющих возможность наиболее квалифицированным образом организовать это дело.

Так, например, в 30-х годах Гостехиздат (имевший в своем составе специальное номографическое бюро) выпускал много сборников номограмм для строителей, нефтяников и др. Впоследствии выпуск этих изданий перешел в руки отраслевых технических издательств, как более компетентных в отборе нужного для специалистов данной отрасли материала.

Значительно сократился также с течением времени выпуск Гостехиздатом таблиц. Издание таблиц умножения, деления, процентных вычислений и других расчетных таблиц стало в основном делом Госстатиздата. Значительную роль в выпуске таблиц стали играть Геодезиздат, Издательство АН СССР и другие издательства.

21. Наиболее важную роль играют универсальные справочники, объединяющие материал всевозможного характера, достаточно широкие по тематике и предназначенные для массового читателя. Гостехиздат выпускал ряд таких книг. Еще в начале 30-х годов были изданы переводные справочники по математике Дуббеля и Дэлла, а также «Математический справочник» Бриллинга. В настоящее время наибольшую популярность приобрел «Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов» Бронштейна и Семендяева, содержащий наиболее часто требующиеся таблицы и графики, а также всевозможный справочный

материал по основам элементарной и высшей математики, включая отрасли, имеющие существенное прикладное значение.

Своеобразными и ценными книгами являются справочники по элементарной и высшей математике Выгодского. В них особое внимание уделяется тщательному разъяснению основных понятий с использованием хорошо подобранных примеров и приведением исторических сведений.

**22.** Остановимся на справочниках, специализированных по характеру материала. Колоссальным собранием формул являются известные «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений» Рыжика и Градштейна. В основном графический материал содержит «Графический справочник», выпущенный под редакцией Берманта в 1937 г. Переводная книга Янке и Эмде содержит исключительно таблицы, графики и формулы, относящиеся к различным функциям. Развитие подобного рода литературы является также важной задачей. Помимо переработки и переиздания существующих книг, необходимо также создать новые, в частности терминологические, справочники.

Существует также некоторое число справочников, специализированных по тематике. Здесь возможны как массовые издания вроде книг Семендяева и Панова о счетной линейке, так и справочники для более узких кругов специалистов; сюда относятся, например, книги Панова по численному решению уравнений в частных производных, «Справочная книга по номографии» Невского, «Справочник по операционному исчислению» Диткина и Кузнецова, не считая некоторых более старых книг. Надо сказать, что в этом направлении сделано тоже слишком мало и существуют довольно многочисленные пробелы.

### Научно-популярная литература

**23.** Развитие научно-популярной литературы по математике (как и справочной) шло с большим трудом. Однако в настоящее время уже создан достаточно богатый выбор разнообразных по тематике и характеру как серийных, так и не серийных книг.

Пожалуй, первой серьезной попыткой в этом направлении было вдохновленное энергией Люстерника издание серии «Наука — массам». В серии вышли две книжки Хинчина «Великая теорема Ферма» и «Случай и как наука с ним справляется», книжки Люстерника о геодезических линиях, Александрова и Ефремовича об основных понятиях топологии, а также перевод книг Литцмана «Великаны и карлики в мире чисел» и «Теорема Пифагора». Серия не имела дальнейшего развития, хотя входившие в нее книги получили признание и переиздавались.

На более прочную базу издание популярных серий было поставлено в 1950 г., когда Издательство стало опираться на возникшую в наших университетах замечательную традицию проведения школьных математических олимпиад. Задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, составили ядро первых книг «Библиотеки математического кружка». В на-

стоящее время вышло уже восемь книг этой серии, некоторые из которых неоднократно переиздавались за границей. Они посвящены различным вопросам элементарной и высшей математики. По большей части, изложение в этих книгах носит преимущественно «задачный» характер.

Еще большее развитие получила серия «Популярные лекции по математике», начатая тоже в 1950 г. Она также возникла из лекций, читавшихся для школьников в периоды подготовки к олимпиадам, но в дальнейшем переросла эти рамки. В нее включаются небольшие книжечки, разбирающие отдельные вопросы, относящиеся по существу к высшей математике, но связываемые так или иначе со школьным курсом. К концу 1956 г. серия разрослась до 22 выпусков, многие из которых неоднократно переиздавались у нас и за границей.

24. Из несерийной популярной литературы прежде всего выделяется группа книг по занимательной математике. Начало этому жанру было положено замечательным, ныне покойным популяризатором Перельманом. Принадлежащие его перу «Живая математика», «Занимательная арифметика», «Занимательная алгебра» и «Занимательная геометрия» многократно переиздавались массовыми тиражами, и популярность их всё растет. К этой же группе близки книги Бермана, среди которых можно назвать «Циклоиду», «Число и наука о нем» и ряд других. Наконец, в последние годы вышла «Математическая смекалка» Кордемского, сразу завоевавшая большую любовь читателей. Пожалуй, стоит здесь же назвать прекрасную переводную книгу Штейнгауза «Математический калейдоскоп» и «Удивительный квадрат» Кордемского и Русалева.

Довольно богата и более серьезная научно-популярная литература, ставящая своей целью не только заинтересовать читателя, но и изложить ему более или менее глубокие математические идеи. Можно назвать ряд книг, посвященных геометрии Лобачевского (Лукияненко, Кагана, Широкова, Нордена и др.), книгу Пархоменко «Что такое линия», Хинчина «Три жемчужины теории чисел», переводную книгу Радемахера и Теплица «Числа и фигуры» и ряд других книг.

На грани между научно-популярной и учебной литературой находятся книги для самообразования. Был выпущен ряд таких книг, как по элементарной, так и по началам высшей математики, хотя полный «круг чтения» еще не создан. Укажем на книги Выгодского «Геометрия для самообразования», Барсукова «Элементы алгебры», Берманта и Люстерника «Тригонометрия», Привалова и Гальперна «Основы анализа бесконечно малых» и интересную переводную книгу Куранта и Роббинса «Что такое математика».

25. В заключение нельзя не упомянуть о сборниках «Математическое просвещение». О задачах, которые ставятся перед сборниками, достаточно подробно сказано в редакционной статье.

## УЧЕБНИК АЛГЕБРЫ В. Л. ГОНЧАРОВА

*Г. Б. Гуревич*

(Москва)

**В. Л. Гончаров**, Начальная алгебра, Издательство Академии педагогических наук, Москва, 1955.

В курсе математики, предусмотренном программой средней школы, одним из самых трудных и ответственных моментов является тот, когда учащийся приступает к изучению алгебры. Здесь ему предстоит в сравнительно короткий срок проработать следующие вопросы: а) буквенные обозначения; б) понятие об отрицательных числах; в) преобразования целых и дробных выражений; г) решение линейных уравнений; д) составление уравнений по текстовым задачам.

Из них пп. а), б), д) содержат значительные принципиальные трудности.

Пункты в), г) имеют простую теоретическую основу — свойства арифметических действий, — которая легко усваивается учащимися, если только уделить этому необходимому вниманию. Однако при изучении этих разделов курса встает другая грозная и весьма актуальная опасность: легко увлечься линией наименьшего сопротивления и встать на путь чисто формального усвоения материала; такое явление встречается, к сожалению, довольно часто. Ученики выучивают, без должного понимания, все нужные правила и прекрасно справляются с примерами из задачника. Всё обстоит благополучно; но через один-два года, когда число правил ставится очень большим, учителя ждет весьма неприятная картина «рецидива алгебраической неграмотности»: учащиеся начинают сплошь и рядом делать «обычные ошибки»:  $a^2 + a^3 = a^5$ ,  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ,  $\frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b}$  и т. п. Такого рода ошибки свидетельствуют о том, что вся предыдущая работа по алгебре прошла впустую, что ученики не поняли смысла буквенных обозначений и тождественных преобразований. Следует указать, что традиционный порядок изложения недостаточно препятствует этим явлениям: слишком мало времени уделяется усвоению буквенных обозначений, слишком торопятся перейти к изучению отрицательных чисел. Эти недостатки сказываются и на проработке остальных указанных выше разделов, зачастую остающихся плохо усвоенными.

В книге В. Л. Гончарова ставится цель так построить курс начальной алгебры, чтобы полностью устранить возможность возникновения указанных дефектов. Во главу угла ставится идея функциональной зависимости (сам термин функция в книге не вводится), для чего особое внимание уделяется операции числовой подстановки и графическому истолкованию уравнений. Заучиванию правил противопоставляется отчетливое понимание их происхождения и взаимной обусловленности. Во введении к книге выставляются 45 методических тезисов, положенных в основу изложения; перечислю наиболее важные из них (среди остальных многие также заслуживают большого внимания):

«1. Начинать алгебру не „от текстовой задачи“, а „от формулы“.

2. Наряду с формулами, выведенными из условия задачи, пользоваться также и эмпирическими формулами (описательного или нормативного характера)».

Упражнения, связанные с п. 2, сразу показывают читателям значение буквенных формул и пробуждают интерес к числовым подстановкам.

«3. Широко применять табличную запись; в частности, запись в виде „двойных“ таблиц (таблиц „с двумя входами“).

6. В часы, предназначенные для арифметики, уделять время для составления диаграмм и организации соответствующей домашней работы. Это можно сделать за счет решения алгебраических задач арифметическими методами.

7. Пользоваться „алгебраическим“ определением прямой и обратной пропорциональности (см. §§ 9 и 10).

9. Задачи на пропорциональное деление решать алгебраически, принимая в качестве неизвестного коэффициент пропорциональности».

Приняв пп. 7 и 9, можно будет полностью отказаться от изучения пропорциональных величин «арифметическими методами»; необходимо, наконец, покончить с «тройными правилами», этим последним пережитком средневековья в практике преподавания арифметики. Таким же архаизмом является применение «частей» в задачах на пропорциональное деление.

«10. Пользоваться постоянно (при каждом удобном случае) оборотами речи: „подставить“ численное значение вместо буквы; такая-то величина при таких-то обстоятельствах „возрастает“, „убывает“, также „достигает наибольшего или наименьшего значения“».

Этот пункт имеет основное значение при усвоении идеи функциональной зависимости. Отмечу, кстати, что числовые подстановки послужат прекрасным материалом для повторения арифметики, в чем школа испытывает несомненную потребность.

«13. Поставить на видное место формальные законы арифметических действий (из коих иные ныне даже не упоминаются).

14. Уравнения начинать как можно раньше.

23. Уделить исключительное внимание действиям с нулем и с единицей, вызывая при этом и к логике и к здравому смыслу.

25. Сообщить учащимся правильные, обоснованные и прочные знания по поводу равенства нулю произведения и дроби.

26. Добиться от учащихся понимания того, что буква не всегда обозначает целое положительное число, что не всегда также являются целыми положительными числами числитель и знаменатель дроби».

Последний пункт 26 в настоящее время усваивается многими недостаточно; даже на первом курсе вуза некоторые студенты считают, что число «— $a$ » всегда отрицательно.

«30. Отказаться от „теории равносильности уравнений“ в начальном курсе алгебры.

32. При решении уравнений, уже начиная с VI класса, в основном пользоваться свойствами равенств.

34. Прекратить рассмотрение дробных уравнений с так называемыми „паразитными“ корнями».

Только на пути, указанном в пп. 30, 32, 34, можно добиться от учеников VI и VII классов сознательного решения уравнений.

«36. В начальном курсе алгебры отказаться от заучивания правил действий со степенями.

38. Основные формулы умножения, как и законы действий, подвергать заучиванию в буквенной форме, требуя по мере надобности словесного чтения буквенных записей».

Учащемуся формула должна говорить не меньше, чем словесное ее выражение. Очень плохо, если даже в VIII классе при выводе формулы для решения квадратного уравнения учитель вынужден давать ее пространное словесное описание; это указывает лишь на неудовлетворительное усвоение основной идеи буквенных обозначений.

«40. Применять „выделение квадрата из трехчлена второй степени“, в частности при разложении его на множители».

Указанная операция играет, как известно, весьма важную роль во всей математике (вплоть до интегрального исчисления!). Применение ее к разложению квадратного трехчлена на множители проще обычных искусственных приемов и в то же время служит прекрасной пропедевтикой к решению квадратных уравнений.

Как видим, положенные в основу книги методические идеи весьма ценны и бесспорны. Чтобы ответить на вопрос, как они осуществлены в ней, перейдем к подробному ее рассмотрению.

Прежде всего следует отметить, что в книге объединены и учебник и задачник: после теоретических положений, изложенных кратко, но четко и доходчиво, сразу следуют упражнения в числе, достаточном для усвоения материала. Такой стиль изложения более соответствует возрасту учащихся. Как справедливо указывает автор (стр. 351), «пассивное восприятие математических, большей частью довольно отвлеченных, рассуждений мало свойственно раннему возрасту».

Глава I носит название: «Буквенные выражения»; в §§ 1 и 2 этой главы, посвященных употреблению букв, составлению формул и постановкам числовых значений в формулу, даны основные понятия и многочисленные упражнения, необходимые для их усвоения. Особо отмечу примеры № 9, 10 (составление формулы, выражающей площадь фигуры), 11 (эмпирическая формула для нахождения номера валенок по номеру ботинок), 12 (нормативная формула для числа часов сна в зависимости от возраста); здесь хорошо выясняется истинный смысл буквы как значения некоторой величины. В § 3 рассматривается

словесное чтение формул; упражнения идут в нем под заголовком: «объясните, что здесь написано». В последних трех параграфах главы вводятся уравнения; в § 4 они решаются по догадке, причем автор не останавливается даже перед такими уравнениями:  $x + \frac{16}{x} = 4$ ,  $\frac{1}{x} = 0$ .

Я полагаю, что рассуждение, устанавливающее, что первое из этих уравнений не имеет решений (стр. 27), значительно больше даст для развития учащихся, чем решение «по правилам» многочисленных сложных примеров. В § 5 решение уравнений проводится на основе связи прямых и обратных действий ( $x + 8 = 14$ ; требуется узнать, какое число надо прибавить к 8, чтобы получить 14; какое действие надо применить и т. п.). В § 6 уравнения применяются к несложным текстовым задачам: весьма ценны здесь упражнения (§§ 34, 35, 36) на обратное использование формул (из формулы примера № 11 по размеру валенок найти размер ботинок и т. д.). Заканчивается глава I, как и все последующие, повторительными упражнениями, среди которых стоит отметить № 47—50 (связь между шкалами Цельсия и Фаренгейта, расчет тарифов по формуле, составление соответствующих таблиц). Вообще в главе, как и всюду в дальнейшем, составлению таблиц уделяется особое внимание; это дает обильный материал для целенаправленных числовых подстановок.

В главе II сначала разбирается (§§ 7, 8) графическое изображение величин и сравнение их между собой («на сколько больше» и «во сколько раз больше»), причем настойчиво рекомендуются такие выражения: «в  $\frac{3}{2}$  раза больше», «в  $\frac{1}{3}$  раза больше». Как хорошо известно преподавателям, закрепление такого рода навыков весьма важно. Затем идут (§§ 9, 10, 12) изучение прямой и обратной пропорциональности и решение задач на пропорциональное деление в алгебраической трактовке. Определение прямой пропорциональности таково (стр. 44): «Две величины  $x$  и  $y$  называются пропорциональными, если величина  $y$  выражается через величину  $x$  по формуле  $y = mx$ . Число  $m$  называется коэффициентом пропорциональности».

Такое определение, на мой взгляд, более соответствует сути дела: цена  $y$  купленного хлеба в копейках равна произведению цены  $m$  одного килограмма на число  $x$  купленных килограммов; следовательно,  $y$  пропорционально  $x$ , а  $m$  есть коэффициент пропорциональности. Обычное определение упоминается, но уже как свойство прямой пропорциональности. Так же трактуется и обратная пропорциональность.

В той же главе дано и графическое представление зависимости между величинами, которое иллюстрируется многочисленными примерами, в том числе и железнодорожными графиками (в повторительных упражнениях).

Глава III начинается рассмотрением свойств арифметических действий; при разборе каждого из них основная роль отводится буквенной записи, словесная формулировка служит лишь пояснением. В ряде случаев она вообще не дается. Основные законы просто и хорошо по-

ясняются на диаграммах из точек. Используя уже имеющиеся сведения об уравнениях, автор определяет вычитание как решение уравнения  $a + x = b$ , деление — как решение уравнения  $ax = b$ . Особое внимание уделено свойствам нуля и единицы; им дана сводка в § 17. В № 157 предлагается узнать, справедливы ли равенства

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}, \quad \frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} - \frac{a}{c},$$

с помощью подстановки  $a=1$ ,  $b=3$ ,  $c=2$ . Как отмечено по сходному поводу в методических указаниях (стр. 366), «установить истину стоит труда; чтобы обнаружить заблуждение, часто достаточно одного эксперимента».

Во второй половине главы III изучаются свойства равенств и неравенств, вводятся числовой луч и координатный угол. В повторительных упражнениях обращает на себя внимание № 189 (запись хода игры в волейбол с помощью координатного угла); эта задача вызовет у учащихся несомненный интерес. Ранее введение неравенств, на мой взгляд, заслуживает одобрения.

Изучив главы I, II, III и проделав все упражнения, учащиеся, бесспорно, хорошо овладеют буквенной символикой, поймут ее смысл и значение, а также получат достаточное первоначальное ознакомление с идеей функциональной зависимости и ее графического изображения. Всему этому материалу следует уделить не менее целого полугодия; часть времени, как уже было указано, можно взять у арифметики.

Лишь после всего этого, в главе IV, читатель знакомится с отрицательными числами. Определяются они прямо на числовой прямой; такой подход является спорным. Однако данные в большом числе упражнения позволяют учителю применить любой другой подход (температура выше и ниже нуля, изменение величин, имущество и долг и т. п.). Правило знаков при умножении сначала просто декларируется, а затем поясняется не на самой зависимости  $x = vt$ , а на ее графике (№ 221), что позволит легче усвоить это трудное рассуждение. Весьма интересен § 27, где разобран вопрос о выполнимости всех четырех арифметических действий; тут же, в № 240, на примерах поясняется понятие о допустимых значениях букв (сам этот термин не употребляется). В конце главы определяются координаты точки и строятся графики простейших функций уже на всей плоскости.

Тождественным преобразованиям посвящены главы V и VII (в гл. V — включая умножение многочлена на одночлен). Здесь мы напрасно будем искать правила для «умножения одночленов», для «возведения одночлена в степень» и т. д.; всё это поясняется только на примерах. И действительно, эти громоздкие правила совершенно излишни и лишь отучают учащегося от размышлений. Если он действительно понимает, что такое  $a^2$  и  $a^3$ , то, перейдя к подробной записи, непосредственно увидит, что  $a^2 \cdot a^3 = a^5$ . После достаточных упражнений ученик будет делать это сразу без всякого правила.



Важным нововведением являются буквенные подстановки (§ 35); проводится та мысль, что тождество остается справедливым, если в нем какую-либо букву всюду заменить одним и тем же выражением. Конечно, буквенные подстановки всегда неявно применялись; сделать их явными и пояснить рядом упражнений мне кажется весьма полезным.

Упражнения в главах V и VII проще, чем те, которые предлагаются обычно. Я думаю, что это правильно: сложные преобразования на практике не встречаются, для решения уравнений они во всяком случае не нужны. К более трудным примерам лучше вернуться далее, при повторении материала в связи с действиями над расположенными многочленами. В гл. VII имеем еще и такое нововведение: дан (№ 399, стр. 159—160) наглядный (не вполне обоснованный) вывод теоремы Пифагора; необходимость в этом кажется мне спорной. Среди примеров интересен № 429: «во сколько раз и на сколько увеличится площадь квадрата со стороной равной 1, если его сторону увеличить в  $m$  раз или же увеличить на  $n$ ?». В повторительных упражнениях свежими и своеобразными являются также № 334, 336, 337, 338, 339, 340.

Однако против изложения глав V и VII я имею существенное возражение: на мой взгляд, следовало сделать еще один шаг и отказаться от традиционной терминологии. Последняя основана на идее «действий над целыми алгебраическими выражениями», между тем как в 6-х и 7-х классах надлежит стоять на точке зрения преобразования готовых выражений, более доступной на этой стадии. Традиционная терминология весьма непоследовательна и сильно сбивает учащихся с толку. В самом деле, никакого действия «сложение одночленов», конечно, нет: чтобы сложить два одночлена, достаточно соединить их знаком «плюс». Правда,  $5c + 2c = 7c$  (беру пример из книги Гончарова, стр. 121), но это не сложение одночленов, а приведение подобных членов. Результатом введения этого несуществующего действия и являются попытки сложить одночлены  $a^3$  и  $a^3$ , ведущие к упоминавшимся уже выше печальным последствиям.

Точно так же произведение одночленов  $2ab$  и  $3a^2b$  есть  $2ab \cdot 3a^2b$ ; это выражение вполне подходит под определение одночлена, и я имею полное право заявить, что умножение одночленов выполнено. Та же операция, которую обычно называют умножением одночленов, есть приведение полученного одночлена к простейшему виду; так это действие и следует называть.

Всё сказанное переносится и на остальные действия. Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо, заключив многочлен в скобки, написать сомножители рядом; так именно и понимается это действие при составлении уравнений, если, например, надо умножить  $x$  на  $2x - 1$ . А в § 34 почему-то требуется еще и раскрыть скобки; такая сбивчивость в терминологии недопустима. Я считаю, что все эти действия надо объединить в одно: раскрытие скобок, и говорить в § 33 о раскрытии скобок в сумме и разности многочленов, в § 34 о раскрытии скобок в произведении многочлена на одночлен и т. д. Это немного

длиннее, но зато более четко и более соответствует обычной в математике терминологии.

Деление одночленов и деление многочлена на одночлен — преобразования дробных выражений, в этот отдел они и должны быть отнесены. Это особенно ясно из того, что деление многочлена на одночлен (почленное деление) есть действие, обратное сложению дробей.

В силу сказанного выше я решительно протестую против примера № 308: «Выполнить действия: 1)  $(x^2 + 1) + (x + 1)$ ». Здесь надо выполнить такие действия: возвести  $x$  в квадрат, к результату прибавить 1, к  $x$  прибавить 1 и сложить обе полученные суммы: как их выполнить, если число  $x$  не дано? В самом же деле требуется только раскрыть скобки, а это значит заменить один порядок действий другим. Мы имеем в этом примере противоречие со всеми основными установками автора, и я думаю, что эта уступка традициям должна быть устранена.

Отмечу еще, что в § 33 вообще нет никакой мотивировки, даже ссылки на соответствующее свойство действий; здесь мы имеем очевидный, легко исправимый недосмотр.

В главе VI подводится итог решению линейных уравнений с одной неизвестной. Основной прием здесь: применение свойств равенств, разобранных в главе III и данных дополнительно. Таким образом, учащиеся будут решать уравнения вполне сознательно, каждый раз указывая, на какой основе производятся преобразования уравнений. Это вполне заменит пресловутую «теорию равносильности», которая по своей абстрактности недоступна учащемуся 7-го класса. Лишь после длительной тренировки формулируется правило о перенесении членов из одной части уравнения в другую. В конце главы даны задачи, решаемые с помощью уравнений. В повторительных упражнениях отмечу хорошие примеры № 382, 383 (для прямоугольной фигуры указаны размеры в числах, кроме одного, и вся площадь; найти неизвестный размер).

Глава VIII (расположенные многочлены) может быть исключена из курса начальной алгебры; сейчас это можно сделать беспреткновенно, так как деление многочленов перенесено в программы старших классов. Поэтому на рассмотрении главы VIII я останавливаться не буду.

Существенным нововведением является глава IX; ее основное содержание — геометрическое изучение одного уравнения с двумя неизвестными (переменными). По существу в этой главе и в главе XI даны элементы аналитической геометрии (вплоть до проведения прямой через две данные точки, № 640, гл. XI). Однако автор стоит всё время на более простой точке зрения: линия как график уравнения; понятие об уравнении линии не вводится. В главе IX даны в качестве примеров и парабола как график квадратного трехчлена и гиперболы как график обратной пропорциональности.

Я поддерживаю указанное нововведение: идея графического истолкования уравнений совсем не сложна и вполне доступна ученикам 7-го класса. Между тем своей наглядностью она очень оживляет преподавание алгебры; практическое ее значение, как известно, весьма велико,

и очень хорошо, если уже в неполной средней школе эта идея станет известной учащимся. Графики дадут надежную опору для усвоения понятия функциональной зависимости. То, что совокупность всех решений одного уравнения с двумя неизвестными можно изобразить на чертеже, в значительной мере поможет полному и сознательному усвоению той мысли, что совокупность эта бесконечна. Решение систем уравнений с двумя неизвестными также получает наглядное истолкование, что даст неоценимые преимущества и в дальнейшем курсе алгебры.

Многих смущает то обстоятельство, что прямолинейность графика зависимости  $y = mx + n$  остается недоказанной. Но ведь в курсе начальной алгебры всё равно многое приходится принимать на веру, например, сохранение основных свойств действия после введения отрицательных чисел, что останется неустановленным на протяжении всего курса средней школы. Прямолинейность же упомянутого графика имеет все-таки то преимущество, что в 8-м классе она будет доказана.

В главе X рассматриваются действия над алгебраическими дробями; изложение теории в ней близко к обычному. Интерес представляет здесь ряд упражнений: №№ 559, 564, 565, 566, 567, 582, 583, 601, 609.

Глава XI посвящена системам уравнений с двумя неизвестными; в ней широко используются графики главы IX, что придает всей главе XI необычный вид. И в этой главе дан ряд интересных упражнений (№№ 653, 654, 655, 659, 662).

Последняя глава XII содержит решение квадратных уравнений с числовыми коэффициентами (выделением полного квадрата, формула не указывается). Квадратные и кубические корни разыскиваются по таблицам. Так как в предыдущих главах содержится очень большой материал, то вполне возможно, что глава XII в курсе VII класса не уместится.

В заключение даны общие повторительные упражнения и таблицы квадратных и кубических корней. При работе по книге учителю очень помогут помещенные в конце книги ценные методические указания.

По макету книги, изданному Институтом методов обучения, была проведена экспериментальная работа, которая дала хорошие результаты.

Всё сказанное позволяет нам утверждать, что автор осуществил поставленную цель весьма удачно. Содержание книги всюду вполне полезно для изучающих начальную алгебру, а подбор упражнений сделан так, что они будут работать всё время с неослабевающим интересом и с ясным пониманием как сути дела, так и того, «зачем все это нужно».

Книга В. Л. Гончарова — превосходный и оригинальный учебник начальной алгебры; она представляет собой крупное достижение советской методики математики. По моему мнению, Академии педагогических наук надлежит переименовать ее из пособия для учителей в учебник для школ и добиться для нее равных прав с учебником А. Н. Барсукова, признанным в настоящее время стабильным.

## НОВЫЕ КНИГИ ПО ТЕОРИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

*И. М. Яглом*

(Москва)

**H. Lebesgue**, *Leçons sur les constructions géométriques*, Paris, 1950, 304 стр.;

**L. Bieberbach**, *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Basel, 1952, 162 стр.;

**Б. И. Аргунов и М. Б. Балк**, *Геометрические построения на плоскости*, Москва, 1955, 269 стр.

В течение ряда десятилетий единственной учебной книгой по теории геометрических построений являлась широко известная книга А. Адлера, вышедшая в немецком оригинале еще в 1906 г. и переведенная на многие другие языки (последнее, третье русское издание: Учпедгиз, Ленинград, 1940)<sup>1</sup>). Новые книги на эту тему стали выходить только в последние годы. Первой из них явилась книга А. Лебега, представляющая собой обработку курса лекций, прочитанных автором студентам Collège de France в 1940—1941 гг.; эта книга вышла в свет в 1950 г., уже после смерти Лебега. В 1952 г. в Швейцарии была издана книга Л. Бибераха, происхождение которой связано с лекциями о геометрических построениях, которые читались автором в ряде немецких и швейцарских университетов. И наконец, совсем недавно, в 1955 г., Учпедгиз издал книгу Б. И. Аргунова и М. Б. Балка, составленную, как сказано в предисловии, «на основе чтения авторами обязательных и факультативных курсов элементарной геометрии в педагогических институтах».

Таким образом, все три рецензируемые книги возникли в результате чтения их авторами лекций в высших учебных заведениях и рассчитаны в первую очередь на студентов. Уже это обстоятельство должно было определять различие между ними и названной выше книгой Адлера, не предполагающей, как говорит в предисловии ее автор, никаких знаний по высшей математике. Впрочем, на самом деле по уровню элементарности книги Адлера и Аргунова — Балка почти совпадают: с одной стороны,

<sup>1</sup>) Мы не упоминаем здесь о распространенных задачниках, вроде книг Петерсона или Александрова, содержащих также элементы теории.

Адлер не выдерживает строго своего обещания обходиться только элементарными средствами; с другой стороны, Аргунов и Балк явно рассчитывают не только на студентов, но и на учителей средней школы, имеющих дело исключительно с элементарной математикой, и стремятся поэтому к максимальной элементарности изложения. В противоположность этому Лебег и Бибербах явно рассчитывают на читателей, свободно владеющих высшей математикой, что заметно увеличивает возможности авторов. Так, например, Аргунов и Балк (как и Адлер) лишь сообщают читателям о результатах Гаусса, относящихся к задаче построения правильных многоугольников, или о трансцендентности числа  $\pi$  и неразрешимости задачи квадратуры круга, в то время как Лебег и Бибербах в этих случаях приводят полные доказательства. При этом трансцендентность  $\pi$  Лебег доказывает известным методом Эрмита — Линдемана (в обработке Д. Гильберта); новым для рецензента здесь явилось лишь указание на любопытную связь этого доказательства с доказательством Ламберта иррациональности  $\pi$  (тоже содержащимся в книге Лебега), замеченную, как оказывается, еще Эрмитом. В более поздней книге Бибербаха, в которой чувствуется хорошее стремление к оригинальности, излагается значительно менее популярное и принципиально иное доказательство трансцендентности  $\pi$ , ведущее начало от А. О. Гельфонда.

Существенным недостатком книги Адлера является отсутствие в ней достаточно четкой постановки самого вопроса о том, что значит решить задачу на построение циркулем и линейкой (или иными инструментами); этот недостаток вполне естественен в книге, своими корнями уходящей в доаксиоматический период развития геометрии (основные работы А. Адлера по теории геометрических построений вышли в свет значительно раньше «Оснований геометрии» Д. Гильберта)<sup>1)</sup>. Из рецензируемых книг наибольшее внимание относящимся сюда логическим вопросам уделяет книга Аргунова и Балка; весьма тщательно формулирует постулаты, связанные с построениями теми или иными средствами, также и Бибербах. Что же касается книги Лебега, то в ней вопросам аксиоматического обоснования теории геометрических построений уделено меньше места, — это связано с общим направлением книги, скорее алгебраическим, чем геометрическим. Показательно, что, например, при доказательстве эквивалентности тех или иных инструментов обычному комплексу «циркуль — линейка» Лебег зачастую предпочитает доказывать не возможность решения новыми инструментами «основных» конструктивных задач вроде задачи определения точки пересечения известных прямой и окружности, а возможность построения этими средствами основных алгебраических выражений, как  $x_1 \pm x_2$  или  $\sqrt{x_1 x_2}$ , — этот простой и, по-видимому, новый прием следует предпочесть более обычному, так как он не связан с выделением какого-либо «стандартного» набора чертежных инструментов, к которому сводятся другие их комбинации.

<sup>1)</sup> Этот недостаток в русских изданиях книги Адлера в значительной степени устранялся содержательным «Введением», написанным С. О. Шатуновским, и его же примечаниями.

В связи с только что сказанным можно отметить еще один недостаток книги Адлера и вообще всех прежних сочинений по теории геометрических построений — выдвигание на центральное место построений циркулем и линейкой, не оправдываемое никакими серьезными соображениями и связанное исключительно с исторической традицией, порожденной установками древнегреческой геометрии. И здесь можно весьма приветствовать резкий разрыв с этой традицией, осуществленный Бибербахом. Место, которое занимают построения циркулем и линейкой в его чрезвычайно богатой конкретным материалом книге, определяется исключительно конструктивной мощностью этого комплекса и никакими другими соображениями. Соответственно этому, таким построениям посвящен лишь один (шестой) из 30 параграфов книги: после первого, вводного параграфа рассмотрены построения одной линейкой и построения с помощью одной линейки при наличии в плоскости той или иной фиксированной фигуры, завершающиеся тем случаем, когда этой фигурой является окружность с известным центром; после этого изучаются построения циркулем и линейкой; затем рассматриваются построения другими инструментами, сначала эквивалентными циркулю и линейке, а затем и более сильными, позволяющими решать большее число задач. Надо, впрочем, заметить, что при рассмотрении инструментов, эквивалентных циркулю и линейке, и при доказательстве невозможности тех или иных построений Бибербах каждый раз апеллирует к построениям циркулем и линейкой; так, например, результаты Гаусса о возможности построить правильные многоугольники он формулирует в привычной форме: «правильный  $n$ -угольник можно построить циркулем и линейкой лишь в том случае, если...» (см. стр. 66 книги). Нам кажется, что в связи с общей структурой книги здесь было бы более уместно обозначить совокупность построений, выполняемых циркулем и линейкой или какими-либо эквивалентными средствами, каким-либо специальным термином («квадратичные построения?»), затем каждый раз говорить о том, принадлежат ли рассматриваемые построения этой совокупности или нет.

В книге Лебега больше места уделено зачастую довольно сложным вопросам арифметики, алгебры и анализа, так или иначе связанным с теорией геометрических построений, чем самим построениям; так, например, одна из трех частей книги посвящена вопросу о построении «по точкам» произвольных кривых и возникающим при этом задачам алгебраической геометрии. При этом Лебег уделяет основное внимание построениям с помощью одной линейки и построениям циркулем и линейкой; выбор именно этих инструментов здесь в значительной степени диктуется алгебраическими, а не геометрическими соображениями (разумеется, циркуль и линейку можно было бы заменить любыми другими эквивалентными этим инструментами — это никак не отразилось бы на большинстве результатов книги).

Наконец, книга Аргунова и Балка почти исключительно посвящена построениям циркулем и линейкой; построения иными средствами здесь уделено даже меньше места, чем в книге Адлера. Это обстоятельство

(связанное, как мне кажется, с неоправданным стремлением авторов строго следовать за программой по элементарной геометрии для педагогических институтов) особенно бросается в глаза при сравнении довольно общей по содержанию первой главы, где специально подчеркивается равноправность различных инструментов и почти «школьных» последующих глав, во многом дублирующих хорошую элементарную книжку Д. И. Перепелкина «Геометрические построения в средней школе» (а частично и «Курс элементарной геометрии» того же автора).

Все три рецензируемые книги значительно богаче книги Адлера по объему исторических сведений, и это составляет их безусловное достоинство. Наиболее богата историческими ссылками книга Бибербаха. Что же касается Лебега, то он явно лучше знаком с работами французских ученых, чем с работами других авторов; в свою очередь Аргунов и Балк наиболее полно освещают результаты русских математиков. Недостаточное знание работ иностранных исследователей приводит иногда Лебега к прямым ошибкам. Так, в конце главы IV первой части он рассматривает построения, которые можно выполнить на поверхности сферы с помощью «циркуля» (позволяющего строить окружности с данным центром и радиусом) и «линейки» (позволяющей провести большой круг через заданные две точки сферы); далее Лебег формулирует как нерешенные задачу о построениях на поверхности сферы с помощью одного «циркуля» и аналогичные задачи, относящиеся к построениям в плоскости Лобачевского. Между тем, на самом деле вопрос о построениях на поверхности сферы, выполнимых при помощи одного «циркуля», был ранее исследован датскими и немецкими математиками; полученным ими интересным результатам посвящен последний параграф книги Бибербаха (предыдущий параграф этой книги посвящен рассмотренному и в книге Лебега вопросу о построениях «циркулем» и «линейкой» на поверхности сферы). С другой стороны, также и весь круг вопросов, относящихся к построениям в геометрии Лобачевского, был основательно изучен русскими геометрами; относящиеся сюда исторические и библиографические указания имеются в книге Аргунова и Балка.

Резюмируя настоящий краткий обзор трех новых книг по теории геометрических построений, следует отметить, что монографии Лебега и Бибербаха представляют собой содержательные сочинения, очень отличающиеся одно от другого установками и самим материалом и значительно расширяющие наши знания в этой древней области; велики также и чисто литературные достоинства обеих этих книг. Более скромные цели преследует книга Аргунова и Балка, рассчитанная на совсем другой, более широкий круг читателей; для этих читателей польза книги совершенно бесспорна. При этом появление пособия Аргунова и Балка вовсе не снимает вопроса о издании в дальнейшем на русском языке книг на ту же тему, рассчитанных на более квалифицированного читателя и более широко использующих современный математический аппарат.

---

## КАК РЕШАТЬ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЗАДАЧУ

Ю. М. Гайдук

(Харьков)

G. Polya, How to solve it, 5-е изд. <sup>1)</sup>).

В русской и иностранной литературе имеется немало работ, посвященных методам решения отдельных типов математических задач — арифметических, конструктивно-геометрических и т. п. Иначе обстоит дело с разработкой общей методики решения (и вместе с тем обучения решению) математических задач. Специальных трудов по этой обобщенной теме, взятой во всей ее широте, в литературе до настоящего времени, в сущности, не было.

Между тем потребность в такого рода монографии не подлежит сомнению. Она определяется всё более актуальной проблемой развития активного математического мышления у изучающих математику на всех уровнях образовательной системы. Ознакомление лишь со специальными способами решения отдельных типов задач грозит тем, что учащиеся усвоят только шаблонные приемы.

В свете сказанного заслуживает внимания недавно вышедшая в США несколькими изданиями и уже переведенная на некоторые европейские языки книга известного американского математика Г. Полиа. Эта книга может быть охарактеризована как подготовительная школа творческого решения математической задачи. Она обращена как к тем, кто учится математике, так и к тем, кто ее преподает. С целью максимального расширения своей читательской аудитории автор черпал необходимый ему иллюстративный материал почти исключительно из области элементарной математики, но развитые в книге методы и указания сохраняют всю свою силу и для более «высоких» математических дисциплин (и, в сущности, не ограничены рамками одной математики).

Полиа предлагает определенную систему развития способности учащегося решать математические задачи. В основе этой системы лежит мысль — привить ученику как навыки логического рассуждения, так и прочные навыки эвристического мышления.

---

<sup>1)</sup> В нашем распоряжении имеется немецкий перевод книги (несколько дополненный по сравнению с американским пятым изданием), изданный швейцарским издательством А. Франке в 1949 г. под названием «Schule des Denkens» (266 стр.).



*Эвристикой* некогда называли область, промежуточную между логикой и психологией, предметом которой являлось изучение «способов делать открытия и изобретения». Следы такого изучения мы находим уже у древнегреческих философов и ученых. Применительно к математике им особенно занимались, по свидетельству Паппа, автор «Начал» Евклид, Аполлоний Пергский и Аристей Старший. В новое время первую серьезную попытку разработки системы эвристики предпринял Декарт, однако относящаяся сюда его работа «Правила для руководства разума» осталась неоконченной. Позднее этот замысел собирався осуществить Лейбниц, намеревавшийся написать сочинение «Искусство изобретения» (но оставивший лишь отдельные фрагменты к нему). Он придавал большое значение этим вопросам; известны его слова: «Нет ничего более важного, чем умение найти источник открытия — это, по-моему, еще интереснее, чем сделать само открытие». Наиболее полный для своего времени анализ общих проблем эвристики дал чешский математик и философ Больцано в одной из частей своего большого труда «Наукознание» (1837).

Последнее время плодотворно работает в области эвристики и ее приложений к математическим проблемам Г. Поля, усиленно пропагандирующий этот круг вопросов в своих специальных лекциях и в печати. Итоговое выражение эта деятельность ученого получила в его двухтомном труде «Математика и правдоподобное рассуждение»<sup>1)</sup>. Рецензируемая нами книга, в сущности, служит элементарным введением к указанному труду, отличающимся педагогической направленностью.

Поля следующим образом характеризует современный аспект эвристики:

«Новейшая эвристика стремится прийти к пониманию процесса решения проблем и, особенно, к пониманию тех мыслительных операций, которые оказываются типически полезными при этом процессе. Свои данные она может черпать из различных источников. При серьезном изучении эвристики необходимо рассматривать как логический, так и психологический фон предмета, использовать то, что о нем говорили Папп, Декарт, Лейбниц, Больцано, и меньше всего должен быть при этом забыт свободный от предубеждений опыт».

Поля считает методику изучения математических задач в школе одной из важнейших областей приложения эвристики. Соглашаясь, что в школьном преподавании большое место должны занять «шаблонные» задачи, он в то же время подчеркивает, что было бы непростительно предлагать учащимся только задачи такого характера:

«Обучать чисто механическому выполнению математических операций значило бы опуститься ниже уровня поваренной книги, рецепты которой всё же оставляют некоторую свободу фантазии и суждению повара, — чего не допускают математические рецепты».

<sup>1)</sup> Советские читатели вскоре получат возможность познакомиться с этой книгой в русском переводе, подготовленном Государственным издательством иностранной литературы. Об этом труде Поля см. статью проф. С. А. Яновской «Об одном применении истории математики», сборник «Вопросы истории естествознания и техники», вып. I, М., 1956.

Наряду с ролью задач как важного средства воспитания активного мышления учащегося Полна выдвигает на передний план и их влияние на формирование ценных черт характера учащегося:

«Неверно думать, что решение задачи представляет собой акт одного чистого разума; существенное значение имеют здесь также настойчивость и эмоциональные движения. Для решения серьезной научной проблемы нужна сила воли, способная выдержать годы тяжелого труда и горьких разочарований... Обучение решению задач есть воспитание воли. На опыте решения не слишком легких задач учащийся научается упорно преодолевать неудачи, ценить постепенные успехи, выжидая появления „счастливой идеи“, чтобы затем сосредоточить на ее осуществлении все свои силы. Если учащийся не получил в школе возможности пережить те эмоции, которые приносит борьба за решение задачи, его математическое обучение нужно признать неудавшимся в жизненно важном пункте».

Чтобы познакомиться ближе с конструктивными идеями Полна в области методики изучения в школе решения математических задач, обратимся к более полному рассмотрению содержания его книги.

Композиция книги своеобразна. Ее логическим ядром служит так называемая «Таблица», вынесенная на страницы внутренней обложки. Это — перечень стереотипных вопросов и советов, обращенных к ищущему решение какой-либо математической задачи и предназначенных облегчить эти поиски введением их в рамки определенной продуманной системы.

Всё остальное содержание книги представляет собой, по существу, обширный комментарий к этой таблице. Кроме предисловия и введения, оно состоит из трех «частей».

Часть I (стр. 14—47), озаглавленная «В классе», адресована главным образом к учителю: она знакомит с общей структурой таблицы и характером ее элементов. На трех несложных примерах (вычисление диагонали прямоугольного параллелепипеда, задача о вписании квадрата в данный треугольник, определение скорости некоторого движения с помощью дифференцирования) показано применение таблицы в условиях классного преподавания.

Совсем небольшая часть II (стр. 48—51) «Как решать задачи» написана в форме диалога между «идеализированными» учеником и учителем; ее назначение — разъяснить, в какой форме можно использовать указания таблицы для правильного руководства самостоятельной работой учащегося над решением задачи.

Около трех четвертей объема книги занимает последняя, третья, часть (стр. 52—252) «Эвристический словарь». Это — собрание 67 небольших статей и заметок, расположенных в алфавитном порядке названий; оно отчасти существенно дополняет содержание первой части, отчасти создает для него более глубокий научный, историко-математический или педагогический фон. Связь между статьями «словарика» и общим планом книги выяснена в статье «Современная эвристика».

Полагая, что для читателя таблица Полна должна представлять интерес во всех деталях, мы целиком воспроизводим ее.

## Т а б л и ц а

## Как искать решение математической задачи

**Первый фазис:** Нужно *понять* задачу. Понять задачу значит уяснить себе:

- *Что в задаче неизвестно? Что дано?*
- *В чем состоит условие?*
- Можно ли удовлетворить условию? Достаточно ли условий, чтобы найти неизвестную? Или их мало? Или их больше, чем нужно? Или они противоречивы?
- *Сделай чертеж! Введи удобные обозначения!*
- *Раздели условие на его части! Сможешь ли ты их записать?*

**Второй фазис:** Нужно *отыскать связь между данными и неизвестной*. Если непосредственно связь нельзя найти, нужно попробовать рассмотреть вспомогательную задачу. В итоге нужно прийти к плану решения.

Составление плана:

- Не встречалась ли тебе эта задача раньше? Хотя бы в несколько другой форме?
- *Не знаешь ли ты какой-нибудь родственной задачи?* Не знаешь ли теоремы, которая может оказаться полезной?
- *Рассмотри неизвестную!* И постарайся вспомнить задачу, в которой та же или подобная неизвестная.
- *Вот задача, которая сходна с твоей и уже решена. Сумеешь ли ты ее использовать?* Сумеешь ли применить ее результат? Сумеешь ли использовать ее метод? Нельзя ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы можно было использовать этот метод?
- Нельзя ли иначе выразить задачу? Еще иначе? Вернись к определению (дефиниции)!
- Если не удастся решить данную задачу, нужно попробовать сначала решить сходную. Сумеешь ли ты придумать более доступную тебе сходную задачу? Более частную? Аналогичную задачу? Сумеешь ли решить часть задачи? Удержи только часть условий и опусти остальные; насколько определенной останется тогда неизвестная? Как ее можно изменять? Сумеешь ли ты вывести что-либо полезное из данных? Сумеешь ли придумать другие данные, из которых можно было бы определить неизвестную? Можно ли так изменить неизвестную или данные — или ту и другие, — чтобы дистанция между новой неизвестной и новыми данными сократилась?
- Использовал ли ты все данные? Использовал ли все условия? Учел ли все существенные понятия, содержащиеся в задаче?

**Третий фазис:** Нужно *выполнить* план.

При выполнении плана *контролируй каждый шаг*. Ясно ли тебе, что этот шаг правилен? Сумеешь ли ты доказать, что он правилен?

**Четвертый фазис:** Нужно *изучить полученное решение*.

- Сумеешь ли ты проверить результат? Сумеешь ли проверить вывод?
- Сумеешь ли вывести результат другими способами? Не можешь ли усмотреть его с первого взгляда?
- Сумеешь ли ты использовать результат или метод для какой-нибудь другой задачи?

Остановимся на характерных чертах содержания этой таблицы.

В процессе решения всякой математической задачи Полла различает четыре главных последовательных фазиса: *понимание задачи, разработка плана ее решения, выполнение этого плана, изучение полученного решения*. Каждому из этих фазисов в таблице соответствует своя группа вопросов и советов. Автор таблицы подчеркивает необхо-

димость фиксации внимания решающего задачу на *каждом* из этих фазисов (лишь в случае, если решающий задачу сразу нападает на совершенно ясную для него идею решения, второй и третий фазисы могут слиться воедино). Такая последовательность гарантирует от распространенной ошибки, которую совершают учащиеся, торопящиеся переходить к выкладкам и к рассмотрению частных задач, не дав себе труда разобраться как следует в условии задачи и наметить общий план ее решения. Кроме того, эта последовательность устанавливает в качестве обязательного момента работы над решением задачи *заключительный фазис* всестороннего критического осмысления полученного решения задачи и ее самой — момент, либо вовсе опускаемый в обычной практике решения задач в школе, либо, в лучшем случае, применяемый лишь в очень ограничительном смысле («проверки полученного ответа по условию задачи»).

Заметим, что второй (а в соответствующей части и четвертый) фазис протекает в основном в русле эвристического мышления, тогда как третий фазис характеризуется преобладающей ролью строго логического умозаключения<sup>1)</sup>.

Что касается первичных элементов таблицы Поля — ее вопросов и советов (тот или другой выбор между вопросительным или повелительным наклонением здесь, в действительности, не имеет значения — существенны лишь те реакции, которые они вызывают в деятельности решающего задачу), то здесь нужно отметить два обстоятельства.

1) Все вопросы и советы сформулированы в самой таблице применительно к «задачам на нахождение» (неизвестных величин); таким образом, некоторые из них неприменимы к другому роду задач — к «задачам на доказательство» (тех или иных предложений). Не представляет, однако, большого труда составить по типу данной таблицы и для задач на доказательство.

2) В отмеченных сейчас рамках табличные вопросы и советы отличаются совершенно *общим* характером: они применимы к любой математической (да и не только математической) задаче. Эта особенность таблицы Поля педагогически очень важна: вопросы и советы, предлагаемые преподавателем учащемуся (или последним самому себе), обладая полной общностью и естественностью (все они могли бы, замечает автор, прийти в голову самому учащемуся), оказывают учащемуся *не навязчивую* помощь, оставляют ему достаточную долю работы и связанное с этим внутреннее удовлетворение.

<sup>1)</sup> О характере эвристического рассуждения Поля пишет в одной из заметок своего словаря: «Эвристическое рассуждение — это не окончательное и строгое, но лишь предварительное и правдоподобное рассуждение, облегчающее поиски решения задачи... Мы нуждаемся в эвристическом мышлении, когда готовим строгое доказательство, подобно тому, как мы и нуждаемся в лесах, когда строим здание». И далее: «Эвристическое рассуждение само по себе ценно. Плохо лишь, если его смешивают со строгим доказательством. Еще хуже, если его выдают за строгое доказательство».

Мы заключим общую характеристику таблицы Поляна следующей цитатой, содержащей полезные указания о ее практическом применении:

«Если учитель хочет стимулировать у своих учеников способность решать задачи, он должен суметь привить им интерес к задачам и уделить достаточно времени для упражнений. Если учитель хочет развить у своих учеников мыслительные операции, соответствующие вопросам и советам нашей таблицы, он должен предлагать эти вопросы и советы ученикам возможно чаще, не впадая, однако, в пазойливость и педантизм. Решая какую-либо задачу перед классом, учителю следует излагать свои мысли немного *драматически*, ставя себе те же вопросы, которые он предлагает и своим ученикам. Таким образом, ученик в конце концов овладеет правильным употреблением вопросов и советов таблицы и тем самым приобретет нечто более ценное, чем знание какого-либо частного математического предложения».

Книга Поляна — несомненно отрадное и яркое явление в современной западной методико-математической литературе (вообще не очень богатой). Справедливо подчеркивая педагогическое значение математической задачи в школьном преподавании и предлагая заслуживающую серьезного внимания и опытной проверки методику обучения решению задач, книга эта, кроме того, ценна тем, что попутно защищает ряд здоровых, но часто игнорируемых принципов педагогики математики. В последней связи укажем особенно на защиту автором книги дедуктивного элемента в основном курсе геометрии в средней школе<sup>1)</sup>.

Книга Поляна не лишена, однако, недостатков. Уже ее композицию, в которой центр тяжести перенесен на третью часть, написанную в плане обширного и не очень удобного для связного чтения комментария к слишком сжато изложенным двум первым частям, трудно признать особенно удачной. Как отмечает и сам автор, «более тонкие или полемические» аспекты проблемы методики изучения задач сознательно не рассмотрены в книге. Слабо освещены в книге (несмотря на наличие специальной статьи в словарики) особенности математических задач практического (прикладного) характера. Не всегда автор достаточно иллюстрирует примерами даже специально подчеркиваемые им положения.

Если указанные недостатки и снижают в какой-то мере ценность книги Поляна, то всё же «алгебраическая сумма» ее достоинств и недостатков, конечно, такова, что вполне оправдывает данную нами выше оценку этой книги<sup>2)</sup>. Нужно пожелать, чтобы советский учитель математики смог познакомиться с книгой Поляна в русском переводе.

<sup>1)</sup> См., например, его статью «Зачем нужны доказательства» в «Эвристическом словаре».

<sup>2)</sup> С большой похвалой отозвался о книге Поляна известный голландский математик Б. Л. Ван-дер-Варден в своей вступительной лекции в Цюрихском университете 2 февраля 1952 г.: «Эту увлекательную книгу должен прочитать каждый студент, каждый ученый, а особенно каждый учитель» (журнал «Elemente der Mathematik», № 6, 1953).

## ДВЕ ЗАРУБЕЖНЫЕ КНИГИ ПО ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

**Б. А. Кордемский**

(Москва)

**M. Kraitchik, Mathematical Recreations, New York, 1953.**

**W. Lietzmann, Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen, Göttingen, 8-е изд., 1956.**

1. Творческими усилиями математиков, в том числе и самых крупных, создана богатейшая коллекция своеобразных внеучебных математических задач и проблем «на смекалку», или «занимательных задач», как их чаще называют. Зарождение этого типа задач — в той же далекой древности, как и зарождение математической науки. Истоки — в старинных коллекциях проблем, пришедших к нам из Египта, от греков, арабов, индийцев, из древнего Китая.

Ненасытная человеческая любознательность, жажда умственной деятельности и интерес к необычайному и курьезному, а также сила педагогического воздействия, присущая занимательным задачам, обусловили их жизнедеятельность. Действительно, значительная часть коллекции занимательных задач оказалась весьма долговечной, переходит из поколения в поколение в своем первоначальном облике или легко распознаваемых вариантах. Усилиями одаренных людей со временем «распутывались» отдельные головоломки, обосновывались игры и парадоксы, задачи получали исчерпывающее решение. Если иные задачи теряли при этом смысл головоломок или игр и выпадали из коллекции, то другие, наоборот, лишь приобретали дополнительную остроту и новый смысл.

Одна из первых успешных попыток отбора занимательных задач, разбросанных по отдельным папирусам, трактатам, манускриптам и циркулирующих в устной передаче, относится к VIII в. Имеется в виду рукописный манускрипт «Предложения для изощрения ума юношества» («*Propositiones ad acuendos juvenes*»), автором которого считается Алькуин из Йорка (775 г.). Сохранилась запись этого сочинения, датированная 1000 г.

Тщательно подобранная В. Аренсом (Германия) библиография европейских книг, имеющих отношение к проблемам и задачам занимательной математики, доведенная от VIII в. до 1918 г., насчитывает

762 наименования (включая, правда, и некоторые повторные издания одной и той же книги). Продолжая эту библиографию по 1943 г., Шааф в журнале «Scripta Mathematica» (1944) перечислил еще 156 книг (из них только одну на русском языке) и 158 журнальных статей (за первые 43 года XX столетия). Но и в совокупности оба библиографических списка далеко не исчерпывают даже европейской литературы по занимательной математике. Так, например, по данным E. Cazalas (Франция), относящимся к 1934 г., только о «магических квадратах» написано на французском, немецком, английском и русском языках около 1000 книг и статей, принадлежащих перу более чем 380 авторов. Появление статей о «магических квадратах» в английских, немецких и французских математических журналах не прекращается и поныне.

2. Большим энтузиастом математических развлечений является проф. М. Крайчик (М. Kraitchik, Брюссель) — автор известного на западе учебника по теории чисел и большого, подробного сборника классических и новых задач занимательной математики «La mathématique des jeux, ou Récréations mathématiques» (1930).

В 1931 г. Крайчик основал журнал «Sphinx», целиком посвященный математическим развлечениям. В годы второй мировой войны «Sphinx» перестал издаваться и, к сожалению, еще до сих пор не возобновился. По инициативе Крайчика были организованы и проведены два международных конгресса по математическим развлечениям (Congrès International des Récréations Mathématiques): в 1935 г. в Брюсселе и в 1937 г. в Париже. Оба конгресса происходили, по-видимому, без участия представителей нашей страны.

В 1941 г. Крайчик был приглашен в Нью-Йоркскую новую школу общественных наук для чтения систематических лекций по математическим развлечениям. На основе этих лекций он выпустил в 1943 г. новый вариант книги «Математические развлечения» теперь уже на английском языке. Это — компактная, превосходная, со вкусом и любовью написанная книга. Среди западноевропейских книг, предназначенных для широкого круга читателей со средним математическим образованием, книга Крайчика, несомненно, и по сей день является лучшей. (Одно из очередных изданий этой книги датировано 1953 г.)

Содержание книги разбито на 12 глав в основном по операционно-тематическому принципу, но не очень строго. Иллюстрации даны только в форме необходимых чертежей, сопровождающих условие или решение задачи. Решение задачи приводится вслед за ее условием.

Глава первая «Математика без вычислений». Здесь около десятка задач, среди которых логические, шахматные и одна геометрическая.

Открывает главу следующая задача-шутка:

«Пришли ко мне два друга. Оба — отличные шахматисты. После обеда я с каждым из них сыграл по одной партии и обе проиграл, несмотря на то, что имел пешку в качестве «форы». Вошедшая в ком-

нату двенадцатилетняя дочь приветствовала нас и сказала: «Папочка я стыжусь за тебя. Если позволишь, я сыграю успешнее и без всякой „форы“. Я буду играть одновременно на двух досках, с одним партнером — белыми, с другим — черными». (Кстати, дочь была едва лишь знакома с правилами движения фигур.) К моему восторгу, смешанному с досадой, она действительно сыграла с лучшим результатом, нежели я. Как она действовала?»

Завершается глава уже солидной геометрической задачей, но поданной в такой же проницательно-забавной форме:

«Почтенное семейство пауков, состоящее из обширной мамы и восьми тощих подростков, гнездилося на одной из стен комнаты, четыре стены которой, пол и потолок — прямоугольники. Из-за второй мировой войны пищи было недостаточно и голодные паучки непрерывно ворчали. Но вот на противоположную стену тихо села огромная муха.

Если бы Евклид мог быть вызван из могилы, он показал бы, что охотники и жертва были в вертикальной плоскости, проходящей через центры двух противоположных стен, и что пауки находились на восемь дюймов выше центра стены, а муха — на восемь дюймов ниже центра стены. Внезапно один из юных паучков вскричал весело: «Мама, смотри! Там — муха, давайте схватим ее и съедем!» — «Имеется 4 маршрута к мухе. Какой мы выберем?» — пылко воскликнул другой паучок.

— «Вы забыли Евклида, мои дорогие. Имеется 8 маршрутов к мухе. Идите все различными дорогами, не пользуясь другими средствами передвижения, кроме своих собственных ног. Кто достигнет цели первым, будет награжден наибольшей порцией добычи».

По сигналу, данному мамашей, 8 паучков пустились в путь по различным направлениям со скоростью 0,65 мили в час. Через  $\frac{625}{11}$  секунды они одновременно сошлись у цели, но... атаковать было некого, так как муха имела глаза со всех сторон.

Каковы размеры комнаты?»

## Глава вторая. Старинные и курьезные задачи.

а) Из двух старейших французских сборников: Шукке (1484 г.) и Клавюса (1608 г.).

б) Из средневековой греческой «Антологии» (коллекция коротких поэм, называвшихся тогда эниграммами; некоторые из этих эниграмм представляют собой математические задачи).

в) Арабские задачи.

г) Задачи на переливание и дележи.

д) Индийские задачи.

Вот одна из задач этого пункта:

«Значение выражения

$$\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{2}{x-1}\right) \left(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}\right)$$

не изменится, если мы отбросим обе дроби. Почему?»

Без употребления современной символики эта задача, конечно, могла считаться не очень легкой. В сборнике Г. Н. Попова «Исторические задачи» ее нет.

Глава третья. Числовые развлечения и игры. Здесь Крайчик — в своей стихии. Он очень доходчиво рассказывает о простых и совершенных числах, о фигурных числах, о числах Мерсенна и Ферма.



Любопытно отметить, что, не выходя за рамки элементарных математических операций, Крайчик предполагает всё же у читателей своей книги наличие хороших представлений о сравнениях. Так, например, упоминая о том, что Эйлер доказал делимость числа  $F_6 = 2^{32} + 1$  на 641, Крайчик коротко излагает следующее элегантно доказательство этого предложения:

Легко проверить, что  $641 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4 = 5 \cdot 2^7 + 1$ . Тогда по модулю 641 имеем  $5 \cdot 2^7 = -1$ ,  $5 \cdot 2^3 = -2, 5^4 \cdot 2^{32} = 2^1$ ,  $-16 \cdot 2^{32} = 16, 2^{32} = -1$  и, наконец,  $2^{32} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$ .

В одной из задач предлагается найти такое целое число  $x$ , чтобы оно вместе с  $x^3$  содержало все цифры от 1 до 9, каждую по одному разу.

Решение: так как сумма девяти цифр равна 45, то  $x + x^2 \equiv 0 \pmod{9}$ . Имеются два решения этого сравнения, которые удовлетворяют остальным требованиям задачи:  $567^2 = 321\,489$  и  $854^2 = 729\,316$ .

Есть раздел с арифметическими фокусами по угадыванию задуманных чисел и упражнения на применение недесятичных систем счисления.

Если в системе счисления с основанием  $B$  все степени числа оканчиваются каждый раз заданной цифрой или группой цифр, то такие числа Крайчик называет автоморфными. Рассматриваются примеры и свойства автоморфных чисел.

Далее автор знакомит читателей с тождествами вида  $\sum a^x = \sum b^x$  для более чем одного значения  $x$  и замечает, что очень приятно найти тождество указанного вида с большим числом значений для  $x$ .

«Cryptarithmic» — так называется раздел главы, содержащий задачи, в которых компоненты арифметических действий зашифрованы. Требуется восстановить зашифрованные цифры. Последний раздел главы посвящен классическим арифметическим играм (обобщение и различные модификации игры «кто первым достигнет 100», ним, меледа, ханойская башня, задача Иосифа Флавия).

Числовым головоломкам, т. е. задачам, не имеющим общих принципов решения, автор не предоставил места в своей книге.

Глава четвертая. *Арифметико-геометрические вопросы.* Здесь рассматриваются проблемы, относящиеся к треугольникам с целочисленными сторонами.

Глава пятая. *Календарь.* Коротко изложена история календаря; приведены примеры механических и вечных календарей. Задач нет.

Глава шестая. *Вероятность.* Подобраны обычные вводные задачи на вычисление вероятности и дан анализ некоторых азартных игр.

Глава седьмая. *Магические квадраты.* Крайчик в «Математических развлечениях» лишь слегка касается вопросов теории магических квадратов, но знакомит читателей с одним из новейших приемов составления магических квадратов при помощи «решетки точек» и так называемых «ломаных путей».

Эти пришельцы из древнего Китая и Индии до сих пор продолжают увлекать не только любителей, но и математиков.

Биберах, например, за последние три года опубликовал две большие статьи: «О штифелевых магических квадратах» и «Математические вопросы в области магических квадратов».

Классический магический квадрат — это квадратная таблица, составленная из  $n^2$  последовательных натуральных чисел так, что суммы чисел одинаковы вдоль каждого вертикального и горизонтального ряда и вдоль каждой из главных диагоналей. Если хотя бы одна из главных диагоналей не обладает этим

свойством, то квадрат называется полумагическим. Квадрат называется бимагическим, если при замене чисел их квадратами сохраняются все указанные свойства магичности. Соответственно определяется тримагический и вообще мультимагический квадрат.

С магическими квадратами тесно связаны латинские и эйлеровы квадраты. Латинским квадратом Эйлер назвал такое размещение  $n$  различных букв латинского алфавита на  $n^2$  полях разделенного квадрата, при котором не будет повторяющихся букв в любой строке, в диагоналях, в любом столбце. Два латинских квадрата, наложенных друг на друга, образуют квадрат Эйлера, если никакие соответствующие поля не содержат одинаковых букв.

Теория магических квадратов состоит в разработке теорем существования, методов составления таких квадратов и методов определения числа решений. Из наиболее поздних результатов можно упомянуть, например, что Тарри доказал невозможность эйлерова квадрата 6-го порядка (содержащего  $6 \times 6$  ячеек), а Фишер и Ятес в 1934 г. доказали существование латинских квадратов 6-го порядка и табулировали их. Бибербах в одной из вышеупомянутых своих статей отмечает, что «теория латинских квадратов за последнее десятилетие получила много находок по причине полезности этой конструкции главным образом при планировании экспериментов в биологии». Райнер доказал невозможность панмагических квадратов порядка  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , Россер и Уокер в 1939 г. разработали новый метод конструирования всех возможных панмагических квадратов 5-го порядка (статья в журнале «Duke Mathematical Journal») и т. д.

Глава восьмая. *Геометрические развлечения*. Приведено несколько задач на перекраивание плоских фигур без обобщений и без доказательств. Паркетаж. Паркетаж на сфере и классические занимательные задачи топологического характера («Кенигсбергские мосты», проблема четырех красок, односторонняя поверхность).

Глава девятая. Эта глава содержит задачи на такие темы: 1) затруднительные переправы; 2) «маневры» поездов; 3) размещение предметов; 4) матчи и турниры.

Главы десятая и одиннадцатая посвящены классическим задачам о размещении ферзей, или ладей, или коней на шахматной доске так, чтобы ни одна фигура не была под ударом другой такой же фигуры.

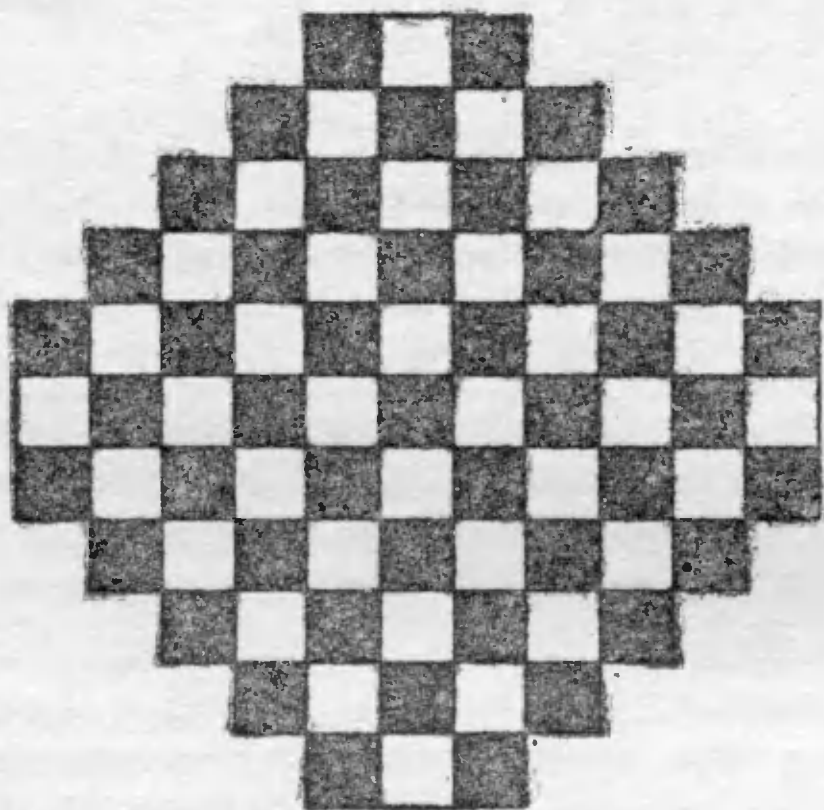
Другой вариант: расставить на шахматной доске наименьшее число одинаковых фигур так, чтобы каждое поле доски было под ударом. Выясняется, например, что во втором варианте задачи минимальное число ферзей равно пяти для досок  $8 \times 8$ ,  $9 \times 9$ ,  $10 \times 10$  и  $11 \times 11$ . В аналогичных условиях наименьшее число коней 12.

Для шахматного коня еще ставится задача: обойти доску непрерывным движением, побывав на каждом поле по одному разу. Известно, что число решений этой задачи очень велико. Только на одной половине обыкновенной доски  $8 \times 8$  конь может сделать 122 802 512 различных маршрутов, каждый из которых в свою очередь может быть продолжен на второй половине доски.

Приводим одну из задач этой серии:

«Дана доска особой формы (см. рисунок). Попробуйте обойти ее шахматным конем, побывав на каждом поле доски по одному разу, или докажете невозможность решения».

Глава двенадцатая. *Игры*. Представлены преимущественно позиционные игры — на шахматной доске. Привлекает внимание интересный прием алгебраизации



возможных «ходов» шахматных фигур и шашек.

Так, например, шашка, как известно, перемещается по диагонали вправо или влево от своего первоначального положения. Пусть символы  $u^k$  и  $u^{-k}$  обозначают соответственно, что шашка находится на  $k$  столбцов правее или левее своей первоначальной позиции;  $u^0 = 1$  будет указывать на то, что шашка осталась в том же столбце, хотя и на другой горизонтали. Логическое отношение «или» будем представлять сложением, а отношение «и» — умножением. Тогда  $x^{-1} + x$  имеет смысл альтернативы, стоящей перед шашкой при каждом

ее движении: «1 столбец налево или 1 столбец направо».

Если шашка делает два движения, то она делает одно движение и делает другое движение, что и показывает запись:  $(u^{-1} + u)(u^{-1} + u)$ , или  $(u^{-1} + u)^2$ . Это значит: «шашка двигается на 1 столбец влево или вправо и она двигается опять на 1 столбец влево или вправо». После раскрытия скобок и приведения подобных членов получаем:  $u^{-2} + u^2 + 2$ , что указывает на все возможные результаты двух движений: «или шашка окажется на 2 столбца левее, или на 2 столбца правее своей первоначальной позиции, или останется в том же столбце».

Аналогичными формулами можно описать и движения шахматных фигур и внести, таким образом, алгебру в игры на шахматной доске.

3. В Германии популярна книга В. Литцмана «Веселое и интересное о числах и формах». В 1956 г. вышло восьмое издание этой книги. Первое издание было осуществлено в 1921 г. По уровню требований к математическим знаниям читателя она еще более массовая, чем книга Крайчика, и ближе к школьным программам по математике. Здесь очень много задач из арсенала тех, при помощи которых школьный учитель заинтересовывает учащихся изучаемым материалом, или поражает их воображение в кульминационный момент преподавания, или производит разрядку умственного напряжения, возникшего в процессе ведения урока.

Книгу свою Литцман называет пирогом с прозрачными изюминками, который он хотел бы сделать удобоваримым, а всыпав в него миндаль в скорлупе, побудить читателя кушать этот пирог медленно.

К большей части задач даны краткие ответы — без решений и без обоснований. За доказательствами и теоретическими сведениями, относящимися к рассматриваемой проблеме, автор отсылает читателей к ранее упомянутому капитальному труду своего соотечественника, В. Аренса «Математические развлечения и игры»<sup>1)</sup>. (На русский язык переведена под тем же названием другая книга Аренса, более краткая.)

Приятное впечатление производит внешний вид книги Литцмана в немецком издании. Хорошая бумага, яркие репродукции с картин Тициана, Тома, Дюрера, сюжеты которых в той или иной мере связаны с математикой, фотография памятник Гауссу, рисунки школьников, например изюшка на тему «Пифагор до открытия теоремы и после», и т. д.

Первые параграфы книги заполнены остротами и шутками математического содержания, выдержками из романов, новелл, очерков, легенд и автобиографий, стихотворениями на математические темы.

Приведено несколько стихотворений, облегчающих запоминание последовательности цифр в числе  $\pi$ , песенки о нуле, об аналитической геометрии, о софизме Зенона, шуточное стихотворение о ревнивном конусе, песня-шутка «Спираль». Когда ее поёшь, надо успевать поворачивать листочки книги и читать текст. Есть стихотворение Лессинга о квадратуре круга, стихотворение Шамиссо о теореме Пифагора, Трояна о «неизвестном», Моргенштерна о параллелях и кубе и т. п.

Даются выдержки математического содержания из произведений Свифта, Томаса Манна, Вильгельма Буша, из романа Э. Штраусса «Смерть» — описание трагедии учителя математики, который не имеет никакого понятия о математике и путает параллелограмм с параллелепипедом. Он считает, что изучение математики состоит в выучивании наизусть таблицы логарифмов. Отрывки из «Фауста» и коротенькая американская танцевальная шутка с геометрическими фигурами в качестве действующих лиц. Отрывок из воспоминаний композитора Грига о том, как он в детстве, получив задачу на умножение, для ускорения дела выбросил нули и в результате потерпел фиаско. «После этого, — пронизывает Григ над собой, — я научился тащить все нули за собой. От них не избавишься».

Приведено несколько афоризмов, например: «Без вдохновения нет математики», «Америка тоже была открыта благодаря гипотезе» и т. п. Несколько заметок о математических темах в изобразительном искусстве. Математические игры, софизмы, парадоксы и противоречия со здравым смыслом.

«Решает, например, мой сын задачу, заданную учителем, пишет Литцман:

«Если 10 каменщиков при 10-часовом рабочем дне за 150 дней выстроили дом, то сколько каменщиков могут выстроить этот дом при 1-часовом рабочем дне за 30 дней».

<sup>1)</sup> W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele.

Сын рассчитал:  $\frac{10 \cdot 150 \cdot 10}{30 \cdot 1} = 500$  каменщиков. Я написал учителю, что расчет может быть и правильным, но условие задачи бессмысленно. Аналогично Вас можно было бы спросить: если один учитель 7 лет учит ученика, то сколько учителей могут это сделать в один день? Что-то около 2100 учителей получается... так-то, господин учитель».

Много несложных шуточных вопросов, например:

- а) Два отца и два сына живут в трех домах. Как это?
- б) Напиши числом: 11 тысяч, 11 сотен и 11.
- в) Одно яйцо варится 4 минуты. Как долго будут вариться 6 яиц?
- г) В семье 5 сыновей. Каждый имеет одну сестру. Сколько всего детей в семье?

д) Часы делают шесть ударов в 6 секунд. Как долго они будут делать 12 ударов?

е) Мария вдвое старше Анны. Через 4 года она будет в 6 раз старше Анны. Сколько лет каждой из них?

ж) Что такое кривая? Кривая — это такая линия, что в идущем по ней поезде из последнего вагона виден паровоз.

В книге много уделено внимания счету. Рассматриваются игры и задачи «на счет», приемы быстрого счета, ошибки и причуды счета, бинарная система счисления и, конечно, магические квадраты.

В разделе «О геометрических формах» представлены задачи на движение и переправы, спичечные задачи (пятью спичками, например, образуйте пять прямых углов), задачи расположения (пять монет расположите в три ряда так, чтобы в каждом ряду было по три штуки) и на перекраивание фигур. Здесь же традиционные задачи о мостах и листе Мёбиуса. Лабиринты и вычерчивание линий одним росчерком. Паркетаж. Примеры на конструирование фигур путем перегибания носового платка или листа бумаги (завязать узел, сложить голубя, письмо и т. п.). Геометрия нитей и игры с нитями.

Последний параграф — рассказ о геометрических формах в искусстве и в природе.

В предисловии Литцман напоминает читателям, что вклад в занимательную математику сделан многими из великих математиков: Кеплером, Паскалем, Ферма, Лейбнином, Эйлером, Лагранжем, Гамильтоном и многими другими, включая ныне живущих. В истоках теории уравнений и теории вероятностей, исчисления бесконечно малых и теории множеств часто можно найти элементы занимательной математики.

## КНИГИ ПО МАТЕМАТИКЕ, ВЫХОДЯЩИЕ В 1957 г.

Публикуемые ниже сведения о книгах по математике, выходящих в 1957 г., не являются, конечно, исчерпывающими. При их составлении использованы тематические планы выпуска литературы на 1957 г. по следующим, в основном центральным, издательствам<sup>1)</sup>: Государственное статистическое издательство (Госстатиздат), Государственное издательство технико-теоретической литературы (Гостехиздат), Государственное издательство «Советская наука» («Советская наука»), Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР (Учпедгиз), Издательство Академии наук СССР (Изд-во АН СССР), Издательство Академии педагогических наук РСФСР (Изд-во АПН РСФСР), Издательство иностранной литературы (ИЛ), Издательство геодезической литературы (Геодезиздат), Издательство Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (Изд-во МГУ).

Литературу по математике (правда, в сравнительно небольшом объеме) выпускают еще издательства республиканских Академий наук, университетов, республиканские учебно-педагогические издательства. Мы были бы признательны, если бы указанные издательства сообщили сведения о книгах по математике, готовящихся к выпуску в 1957 г. и в 1958 г. для помещения их в следующих выпусках «Математического просвещения».

Вся литература по математике распределена здесь по четырем разделам: учебная<sup>2)</sup>, научная, справочная и научно-популярная. Разделы в свою очередь также разбиваются на более мелкие части, в каждой из которых книги даны в алфавитном порядке. Исключение сделано лишь по отношению к учебникам для средней школы, которые даны либо в порядке возрастания классов, либо по разделам элементарной математики.

Большинство книг (за исключением учебников) снабжено небольшими аннотациями.

В сведениях о каждой книге обязательно указывается издательство, ее выпускающее; авторские листы записываются одной буквой «л».

### 1. УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

#### а. для средней школы

##### 1. Учебники, утвержденные Министерством просвещения РСФСР

##### Арифметика

1. ШЕВЧЕНКО И. Н., Арифметика, V — VI кл., изд. 2, Учпедгиз, 11 л.
2. ПОНОМАРЕВ С. А. и СЫРНЕВ Н. И., Сборник задач и упражнений по арифметике, V — VI кл., изд. 4, Учпедгиз, 12 л.

<sup>1)</sup> В скобках приводятся принятые сокращенные названия указанных издательств.

<sup>2)</sup> В этот список не включены учебники и учебные пособия для начальной школы и специальных школ (для глухонемых, слепых и др.).

3. БОГДАНОВ И. М. и КРЫЛОВА З. Е., Арифметика (учебник для школ рабочей и сельской молодежи и школ взрослых), ч. I, изд. 2, Учпедгиз, 5 л.

4. То же, ч. II, Учпедгиз, 10 л.

### Алгебра

5. БАРСУКОВ А. Н., Алгебра, ч. I, VI — VII кл., изд. 2, Учпедгиз, 8 л.

6. То же, ч. II, VIII — X кл., Учпедгиз, 13 л.

7. ЛАРИЧЕВ П. А., Сборник задач по алгебре, ч. I, VI — VII кл., изд. 9, Учпедгиз, 12 л.

8. То же, ч. II, VIII — X кл., изд. 8, Учпедгиз, 16 л.

### Геометрия

9. НИКИТИН Н. Н. и ФЕТИСОВ А. И., Геометрия, ч. I, VI — IX кл., изд. 2, Учпедгиз, 11 л.

10. ФЕТИСОВ А. И., Геометрия, ч. II, IX — X кл., Учпедгиз, 6 л.

11. НИКИТИН Н. Н., Сборник задач по геометрии, ч. I, VI — IX кл., Учпедгиз, 7 л.

12. КВАСНИКОВА З. И., То же, ч. II, IX — X кл., Учпедгиз, 6 л.

### Тригонометрия

13. НОВОСЕЛОВ С. И., Тригонометрия, IX — X кл., изд. 2, Учпедгиз, 5 л.

14. СТРАТИЛАТОВ П. В., Сборник задач по тригонометрии, IX — X кл., Учпедгиз, 5 л.

15. БРАДИС В. М., Четырехзначные таблицы логарифмов, VIII — X кл., изд. 28, Учпедгиз, 5 л.

### 2. Другие учебники и учебные пособия

16. АДАМАР Ж., Элементарная геометрия, ч. I (планиметрия), перев. с франц., изд. 4, Учпедгиз, 36 л.

Французский учебник геометрии, написанный известным математиком. Русский перевод дополнен решениями всех предложенных Адамаром задач, среди которых есть весьма трудные. Эти решения были составлены проф. Д. И. Перепелкиным еще в 1936 г.

17. АНТОНОВ Н. П., ВЫГОДСКИЙ М. Я., НИКИТИН В. В., САНКИН А. И., Сборник задач по элементарной математике (для самообразования), изд. 3, Гостехиздат, 28 л.

Сборник содержит свыше 900 задач, систематизированных по тематике и трудности. К большинству задач даны решения или указания к решению. Рассчитан на лиц, самостоятельно занимающихся математикой, желающих экстерном сдать экзамены на аттестат зрелости или готовящихся к поступлению в вуз.

18. БЕРМАНТ А. Ф. и ЛЮСТЕРНИК Л. А., Тригонометрия, изд. 2, Гостехиздат, 10 л.

19. **ГЕРМАНОВИЧ Ю. П.**, Вопросы, устные упражнения и задачи на соображение, Учпедгиз, 8,5 л.

Содержит свыше 500 разнообразных по содержанию и трудности упражнений по алгебре, геометрии и тригонометрии, охватывающих программу VIII — X классов. Все упражнения снабжены либо ответами, либо указаниями, либо подробными решениями. Может служить также пособием для учащихся старших классов, особенно при подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

20. **ГИБШ И. А.**, Алгебра для VIII — IX классов, Изд-во АПН РСФСР, 17 л.

Содержит учебный материал, построенный на идее функциональной зависимости. Теоретический материал иллюстрируется многочисленными решенными примерами. Каждый раздел заканчивается системой упражнений и вопросов, сопровождаемых теоретическими и методическими указаниями.

### 3. Задания для заочников средней школы

21. **ПОНОМАРЕВ С. А.**, Задания по арифметике, V — VI кл., изд. 9, Учпедгиз, 6 л.

22. **НИКОЛАЕВА И. М.**, Задания по алгебре и геометрии, VI кл., Учпедгиз, 4 л.

23. **ЕВГЕНОВ В. В.**, То же, VII кл., Учпедгиз, 5 л.

24. **МИХЕЕВ И. С.**, То же, VIII кл., изд. 7, Учпедгиз, 5 л.

25. **ЗЕРЧАНИНОВ Н. Т.** и **КАЛНИН Р. А.**, То же, IX кл., изд. 11, Учпедгиз, 4 л.

26. **СТРАТИЛАТОВ В. П.**, То же, X кл., изд. 6, Учпедгиз, 7 л.

### 4. Вспомогательная методическая литература

27. **Анализ письменных работ по математике**, Учпедгиз, 4 л.

В книге излагается опыт работы учителя, разбираются типичные ошибки учащихся, даются образцы записи решения примеров и задач.

28. **АНДРОНОВ И. К.** и **БРАДИС В. М.**, Арифметика, Учпедгиз, 20 л.

Содержит изложение школьного курса арифметики, в основу которого положена идея множества.

29. **БОГУШЕВСКИЙ К. С.** и **СИКОРСКИЙ К. П.**, Методические указания к прохождению курса математики в VIII классе, Учпедгиз, 8 л.

30. То же в IX классе, Учпедгиз, 10 л.

31. **БРОННИКОВА О. В.** и **САГОВСКАЯ Е. Н.**, Дополнительный сборник задач и упражнений по арифметике, Учпедгиз, 12 л.

Содержит задачи и примеры по курсу арифметики V и VI классов, которые могут быть использованы как в классной, так и во внеклассной работе.

32. **ГЕЛЬФАНД М. С.**, Преподавание алгебры в IX классе школы рабочей молодежи, Изд-во АПН РСФСР, 7 л.

Книга является продолжением вышедшей в 1956 г. книги того же автора, посвященной методике преподавания алгебры в VII классе. Составлена с учетом особенностей школ рабочей молодежи и изменений в программе по математике с 1956 г.



33. ГОЛЬБЕРГ А. Г., *Функции и их исследование, производная*, Учпедгиз, 3 л.

В книге дается методическая разработка одного из возможных вариантов изложения темы в X классе, излагаются основы теории, рассмотренные новой программой по математике.

34. ГРИБАНОВ В. У., *Приближенные вычисления в средней школе*, Учпедгиз, 5 л.

Кроме теоретических сведений и методических указаний, книга содержит большое количество упражнений.

35. ДОРФ П. Я. и РУМЕР А. О., *Измерение на местности*, изд. 2, Изд-во АПН РСФСР, 16 л.

Освещается опыт проведения измерительных работ на местности в связи с изучением курса элементарной математики в V — VI классах, главным образом геометрии. Книга содержит конкретный материал для подготовки и проведения геодезических работ в условиях школы.

36. КАБАНОВ Г. И., *Мой опыт изготовления и применения пособий по геометрии*, Учпедгиз, 10 л.

В книге дается подробное описание наглядных пособий по планиметрии и стереометрии для IX и X классов.

37. КОМПАНЕЕЦ П. А., *Простейшие графические работы в школьном курсе математики*, Учпедгиз, 4 л.

38. МАЛЫГИН П. Я., *Элементы историзма в преподавании математики в средней школе*, Учпедгиз, 6 л.

В книге приводятся материалы по истории математики, которые рекомендуются использовать как на уроках математики в V — X классах, так и во внеклассной работе.

39. МИЛОВАНОВА А. Н., *Функции и их исследование; производная*, Изд-во АПН РСФСР, 4 л.

40. НОВОСЕЛОВ С. И., *Руководство по преподаванию тригонометрии*, Учпедгиз, 10 л.

41. ОРЛЕНКО М. И., *Решение геометрических задач на построение по курсу планиметрии*, Учпедгиз, 17 л.

В книге приводятся схема, основные приемы и методы решения геометрических задач на построение. Она содержит много решенных задач на построение для VI — IX классов.

42. *Положительные и отрицательные числа*, Учпедгиз, 4 л.

В книге рассказывается об опыте преподавания данной темы в курсе алгебры, даются теоретические сведения и методические указания по этой теме.

43. ПРЕОБРАЖЕНСКИЙ М. А., *Логически связанные совокупности*, теорем, Учпедгиз, 7 л.

В книге исследуется логическая структура школьного курса математики. Проводится анализ логической структуры задач на доказательство и дана их классификация. Содержится много задач на доказательство.

44. *Преподавание математики в свете задач политехнического обучения*, Сборник, под ред. А. И. Фетисова (Политехническое обучение в школе), Изд-во АПН РСФСР, 16 л.

45. РУПАСОВ К. А., Определения в школьном курсе математики, Учпедгиз, 5 л.

В книге приводится много примеров ошибок, часто встречающихся в учебной литературе и в ответах школьников при формулировке определений.

46. САГОВСКАЯ Е. Н., Планы уроков по арифметике для VI класса, Учпедгиз, 4 л.

Книга содержит методические разработки уроков по арифметике для VI класса. Она представляет собой продолжение аналогичной книги автора для V класса, опубликованной в 1956 г.

47. Сборник статей по вопросам преподавания математики в школах рабочей молодежи, Учпедгиз, 12 л.

Сборник содержит статьи учителей школ рабочей молодежи, излагающие опыт проработки наиболее сложных тем программы по математике.

48. СЕМУШИН А. Д., ЧЕТВЕРУХИН Н. Ф. и др., Геометрические построения, Учпедгиз, 15 л.

49. ФЕТИСОВ А. И. (ред.), Преподавание математики в свете задач политехнического обучения, изд. 3, Учпедгиз, 7 л.

Сборник статей, посвященных вопросам преподавания алгебры, геометрии и тригонометрии в свете задач политехнического обучения.

50. ЧИЧИГИН В. Г., Методика преподавания геометрии, Учпедгиз, 25 л.

#### Б. для техникумов

##### 1. Учебники, утвержденные Министерством высшего образования СССР

51. АНДРЕЕВ П. П., Курс элементарной геометрии для техникумов, изд. 4, Гостехиздат, 12 л.

52. КАЛНИН Р. А., Курс алгебры для техникумов, изд. 4, Гостехиздат, 15 л.

53. КОЖЕУРОВ П. Я., Курс тригонометрии для техникумов, изд. 4, Гостехиздат, 16 л.

54. ЗАЙЦЕВ И. Л., Курс высшей математики для техникумов, изд. 2, Гостехиздат, 17 л.

55. САВЧУК П. М., Сборник задач по высшей математике для техникумов (допечатка). Гостехиздат, 7,5 л.

56. ТАРАСОВ Н. П., Курс высшей математики для техникумов, изд. 10, Гостехиздат, 20 л.

##### 2. Другие учебники

57. ЗЕЛЕНИН Е. В., Черчение (для самообразования), Гостехиздат, 30 л.

В книге излагаются: геометрическое черчение, проекционное черчение, машиностроительное черчение и элементы строительного черчения. Рассчитана на студентов-заочников, инженеров-практиков, техников и других лиц, желающих самостоятельно пополнить свои знания в области черчения.

## В. ДЛЯ ГОСУДАРСТВЕННЫХ УНИВЕРСИТЕТОВ И ПЕДИНСТИТУТОВ

## 1 Учебники и учебные пособия, утвержденные Министерством высшего образования СССР

58. БАХВАЛОВ С. В., Аналитическая геометрия, Учпедгиз, 18 л.
59. БАХВАЛОВ С. В., МОДЕНОВ П. С., ПАРХОМЕНКО А. С., Сборник задач и упражнений по аналитической геометрии, изд. 2, Гостехиздат, 25 л.
60. ГОНИН Е. Г., Теоретическая арифметика, Учпедгиз, 10 л.
61. КОРОВКИН П. П. и ДАВЫДОВ Н. А., Сборник задач по математическому анализу, изд. 2, Учпедгиз, 14 л.
62. МАРКУШЕВИЧ А. И., Краткий курс теории аналитических функций, Гостехиздат, 18 л.
63. МОДЕНОВ П. С., Сборник задач по спецкурсу элементарной математики, «Советская наука», 45 л.
64. НАТАНСОН И. П., Теория функций вещественной переменной, изд. 2, Гостехиздат, 35 л.
65. НЕМЫЦКИЙ В. В., СЛУДСКАЯ М. И., ЧЕРКАСОВ А. Н., Курс математического анализа, в 2 томах, т. I, изд. 3, Гостехиздат, 30 л.
66. То же, т. II, изд. 2, Гостехиздат, 35 л.
67. НОВОСЕЛОВ С. И., Спецкурс тригонометрии, изд. 3, «Советская наука», 30 л.
68. ОКУНЕВ Л. Я., Высшая алгебра, Учпедгиз, 20 л.
69. ПРОСКУРЯКОВ И. В., Сборник задач по линейной алгебре, Гостехиздат, 20 л.
70. СМIRНОВ В. И., Курс высшей математики, в 6 томах, т. I, изд. 17, Гостехиздат, 32 л.
71. То же, т. II, изд. 15, Гостехиздат, 42 л.
72. То же, т. IV, изд. 4, Гостехиздат, 55 л.
73. СОРКИН Ю. Я., Спецкурс элементарной математики, Учпедгиз, 18 л.
74. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г. М., Основы математического анализа, в 2 томах, т. I, изд. 3, Гостехиздат, 29 л.
75. То же, т. II, изд. 2, Гостехиздат, 30 л.
76. ХИНЧИН А. Я., Краткий курс математического анализа, изд. 3, Гостехиздат, 39 л.
77. ЭЛЬСГОЛЬЦ Л. Э., Дифференциальные уравнения для физиков, Гостехиздат, 20 л.

## 2. Другие учебники

78. ТРИКОМИ Ф., Лекции по уравнениям с частными производными, перев. с итал., ИЛ, 25 л.

Книга, написанная выдающимся итальянским аналитиком, вышла в Турине в 1954 г. Содержит ряд важных приложений. Особый интерес представляет изложение (впервые в учебной литературе) так называемой задачи Трикоми и ее приложений к некоторым проблемам газовой динамики. Книга может служить учебным пособием для студентов математиков и физиков, для аспирантов.

## Г. ДЛЯ ДРУГИХ ВУЗОВ

## 1. Учебники и учебные пособия, утвержденные Министерством высшего образования СССР

79. БЕРМАН Г. Н., Сборник задач по курсу математического анализа, под ред. А. Ф. Берманта, изд. 7, Гостехиздат, 29 л.

80. БЕРМАНТ А. Ф. Курс математического анализа, в 2 томах, т. I, изд. 10, Гостехиздат, 30 л.

81. БОЯРСКИЙ А. Я., Математика для экономистов, Госстатиздат, 25 л.

82. ГОРДОН В. О. и СЕМЕНЦОВ-ОГНЕВСКИЙ М. А., Курс начертательной геометрии, изд. 11, Гостехиздат, 27 л.

83. ГЮНТЕР Н. М. и КУЗЬМИН Р. О., Сборник задач по высшей математике для втузов, в 2 частях, часть I, изд. 12, Гостехиздат, 18 л.

84. МИНОРСКИЙ В. П., Сборник задач по высшей математике, изд. 4, Гостехиздат, 17 л.

85. ПРИВАЛОВ И. И., Аналитическая геометрия, изд. 22, Гостехиздат, 20 л.

86. РУДАЕВ А. К., Сборник задач по начертательной геометрии, изд. 9, Гостехиздат, 28 л.

87. ТЕУШ В. Л., Курс высшей математики [для сельскохозяйственных вузов], «Советская наука», 14 л.

88. ТОЛСТОВ Г. П., Курс математического анализа, в 2 томах, т. I, изд. 2, Гостехиздат, 35 л.

89. То же, т. II, Гостехиздат, 35 л.

90. ЦУБЕРБИЛЛЕР О. Н., Задачи и упражнения по аналитической геометрии, изд. 21, Гостехиздат, 23 л.

91. ЧЕБОТАРЕВ А. С., Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей [для геодезических вузов], Геодезиздат, 35 л.

## 2. Другие учебники

92. ПИСКУНОВ Н. С., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Гостехиздат, 45 л.

Книга рассчитана на студентов втузов технологических специальностей, в том числе заочников. Цель книги — дать наиболее доступное изложение курса. Содержит много задач и примеров.

93. РОМАНОВСКИЙ П. И., Дополнительный курс высшей математики для втузов, Гостехиздат, 10 л.

Книга состоит из пяти глав: ряды Фурье и интеграл Фурье, основы векторного анализа (теория поля), начальные сведения об аналитических функциях, о некоторых специальных функциях, элементы операционного исчисления. Охватывает материал, который обычно читают по математике аспирантам втузов.

94. СМІРНОВ Н. В. и ДУНИН-БАРКОВСКИЙ И. В., Краткий курс математической статистики для технических приложений, Гостехиздат, 18 л.

В книге излагаются основные методы статистического исследования применительно к типовым задачам из различных областей техники. Детально разбирается методика расчетов. Для понимания книги достаточно знать математический анализ в объеме программы для втузов. Необходимые же сведения по теории вероятностей приводятся в книге.

95. ЧУВИКОВ Н. Г., Преобразование ортогональных проекций (комбинированный метод), «Советская наука», 8 л.

## II. НАУЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА

## А. МОНОГРАФИИ

96. БЛЕКУЭЛЛ Д. и ГИРШИК М., Теория игр и статистических решений, перев. с англ., ИЛ, 20 л.

Книга, изданная в Нью-Йорке в 1954 г., посвящена изложению двух математических теорий: общей теории игр, т. е. обоснованию рационального выбора поведения («стратегии») в зависимости от имеющейся информации, и теории статистических разрешающих функций (новое направление в теории проверки статистических гипотез). Рассчитана на специалистов по теории вероятностей и по математической статистике.

97. БУЗЕМАН Г. и КЕЛЛИ П., Проективная геометрия и проективные метрики, перев. с англ., ИЛ, 25 л.

В книге, вышедшей в Нью-Йорке в 1953 г., на современном уровне излагается классическая проективная геометрия, а также более свежий материал, связанный с метризацией проективных пространств и геометриями Минковского и Гильберта. Рассчитана на студентов, аспирантов и научных работников.

98. БУТС А. и БУТС К., Автоматические цифровые машины, перев. с англ., Гостехиздат, 15 л.

Книга содержит краткий исторический очерк, описание принципов устройства машин, не требующее специальных знаний по электронике, а также подробный разбор кодов и методов программирования различных задач. Рассчитана на работников различных отраслей науки и техники, использующих в своей работе методы машинной математики. Может быть использована для подготовки кадров специалистов в области вычислительной техники.

99. Быстродействующая цифровая машина М-2, под ред. И. С. Брука, Гостехиздат, 8 л.

Книга дает описание устройства и использования малогабаритной и экономичной электронной цифровой машины, созданной несколько лет назад коллективом Энергетического института АН СССР. Специальная глава посвящена системе программирования. Помогая на примере конкретной машины познакомиться с общими принципами теории автоматических цифровых машин, окажет существенную помощь в деле подготовки кадров для новой бурно развивающейся отрасли техники.

100. ВАЛИРОН Г., Аналитические функции, перев. с франц., Гостехиздат, 12 л.

Книга может служить введением в изучение современной теории аналитических функций. В ней сжато и доступно излагается ряд вопросов, не входящих в учебные программы и не отраженных в учебной литературе на русском языке. Рассчитана на студентов старших курсов и аспирантов университетов и пединституты, специализирующихся по теории функций, а также на научных работников и аспирантов смежных специальностей.

101. Вычислительная математика, вып. 1 (Вычислительный центр АН СССР), Изд-во АН СССР, 8 л.

Сборник статей, посвященных методам решения математических задач, оценкам погрешностей различных методов, анализу задачи колебания линейных систем и решению различных конкретных задач. Рассчитан на работников в области вычислительной техники.

**102. Вычислительная математика**, вып. 2 (Вычислительный центр АН СССР), Изд-во АН СССР, 9,5 л.

В статьях сборника рассматриваются методы вычисления элементарных функций, решения систем линейных алгебраических уравнений при помощи электрической схемы, построения номограмм. Дается краткое описание электронного вычислителя ЭВ-80-03. Помещены две статьи, посвященные задачам газовой динамики.

**103. ГЕЛЬФАНД И. М. и ШИЛОВ Г. Е., Теория обобщенных функций и ее применения**, Гостехиздат, 30 л.

Монография, излагающая основы новой области функционального анализа, возникшей в связи с потребностями математической физики и позволившей правильно поставить и разрешить ряд классических проблем прикладного значения. Рассчитана на научных работников в различных областях математики и смежных наук, а также на аспирантов и студентов старших курсов университетов.

**104. ГОЛДМАН С., Теория информации**, перев. с англ., ИЛ, 20 л.

Книга издана в Лондоне в 1954 г. Это одна из первых книг по математической теории информации, выпускаемых на русском языке. Теория информации имеет важные приложения в теории математических машин, автоматике и теории связи. Рассчитана на широкие круги инженеров, а также на математиков, работающих в данной области.

**105. ЕВГРАФОВ М. А., Асимптотические оценки и целые функции**, Гостехиздат, 7 л.

В книге излагаются метод Лапласа, метод производящих функций, метод перевала и необходимые для их усвоения сведения из теории целых функций. Рассчитана на лиц, работающих в области приложений математики.

**106. ЕРШОВ А. П., Программирующая программа для БЭСМ**, Изд-во АН СССР, 9 л.

**107. ЖОГОЛЕВ Е. А., РОСЛЯКОВ Г. С., ТРИФОНОВ Н. И., ШУРА-БУРА М. Р., Система стандартных подпрограмм для решения задач на вычислительной машине М-2**, Изд-во МГУ, 10 л.

**108. Известия АПН РСФСР, Вопросы общей методики математики**, под ред. Н. Н. Никитина, Изд-во АПН РСФСР, 28 л.

Содержит статьи видных советских ученых и педагогов, освещающие важные вопросы общей методики математики.

**109. Известия АПН РСФСР. КОМПАНЕЕЦ П. А., Некоторые вопросы школьного курса математики**, отв. ред. Б. Г. Ананьев, Изд-во АПН РСФСР, 20 л.

**110. Известия АПН РСФСР. О математическом развитии учащихся специальных школ**, Под ред. А. И. Дьячкова, Изд-во АПН РСФСР, 20 л.

Содержит статьи, посвященные вопросам обучения глухих, тугоухих, умственно отсталых детей и практике работы школ для слепых.

**111. КАНТОРОВИЧ Л. В. и АКИЛОВ Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах**, Гостехиздат, 35 л.

В книге подробно излагаются общие вопросы теории нормированных пространств, а также различные ее приложения (в том числе к вычислительной математике и к нелинейным функциональным уравнениям). Рассчитана на студентов старших курсов государственных университетов, аспирантов и научных работников в области математики.

**112. КАЧМАЖ С. и ШТЕЙНГАУЗ Г., Теория ортогональных рядов,** перев. с англ., Гостехиздат, 24 л.

Книга является лучшей в мировой литературе монографией по общей теории ортогональных рядов, охватывающей все основные разделы теории. Перевод сопровождается обзорной статьей с изложением результатов, полученных в этой области в последнее время. Рассчитана на научных работников в области математики, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области теории функций.

**113. ЛУКОМСКИЙ Я. И. Теория корреляции,** Госстатиздат, 25 л.

**114. ЛЮБАРСКИЙ Г. Я., Теория групп и ее применения в физике,** Гостехиздат, 20 л.

Книга создана на основе курса лекций, неоднократно читавшегося автором для студентов-физиков Харьковского государственного университета. Метод теории групп является в настоящее время одним из основных методов исследования в теоретической физике, в частности в теории элементарных частиц. В книге дается доступное изложение основ теории групп, дано несколько десятков задач и упражнений, рассматриваются также приложения к различным вопросам физики. Рассчитана на студентов и аспирантов государственных университетов, научных работников в области физики и прикладной математики.

**115. МИРАНДА К., Уравнения с частными производными эллиптического типа,** перев. с итал., ИЛ, 10 л.

Единственная в мировой литературе монография, в которой собраны основные результаты, относящиеся к эллиптическим уравнениям. Большое количество фактов снабжено доказательствами, причем подробно обрисовано развитие теории эллиптических уравнений вплоть до самого последнего времени.

**116. НАЙМАРК М. А., Линейные представления группы Лоренца,** Гостехиздат, 20 л.

Монография представляет собой исследования автора о неприводимых линейных представлениях группы Лоренца, играющей важную роль в теоретической физике. Рассчитана на студентов старших курсов и аспирантов университетов, научных работников в области математики и физики.

**117. ПАНОВ Д. Ю., Численное решение гиперболических уравнений в частных производных,** Гостехиздат, 12 л.

Монография, излагающая новый, разработанный автором метод приближенного решения гиперболических уравнений, имеющий значение с точки зрения использования при расчетах на быстродействующих цифровых машинах.

**118. Расслоенные пространства и их приложения,** Сборник, перев. с англ. и франц., ИЛ, 40 л.

Сборник статей Ж. Серра, А. Бореля и др. по одному из новейших разделов современной топологии — теории расслоенных пространств, приведшей к крупным открытиям в топологии и занимающей в ней сейчас одно из центральных мест. Рассчитана на специалистов топологов, а также на математиков, работающих в смежных областях, в которых указанная теория используется.

**119. РИЧАРДС Р. К., Арифметические операции на цифровых вычислительных машинах, перев. с англ., ИЛ, 25 л.**

В книге излагается теоретическая сторона вопроса: основы теории булевских алгебр, операции в двоичной и десятичной системах счисления, основы теории программирования. Рассчитана на математиков-вычислителей, а также на инженеров, работающих с математическими машинами.

**120. СИМОНОВ Н. И., Прикладные методы анализа у Эйлера, Гостехиздат, 8 л.**

В книге рассматриваются те прикладные методы анализа у Леопарда Эйлера, которые относятся к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Основное внимание уделено мало известным результатам Эйлера в этой области. Освещаются также частные методы, предложенные Эйлером для приближенного решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

**121. СТИНРОД Н. и ЭЙЛЕНБЕРГ С., Основы алгебраической топологии, перев. с англ., Гостехиздат, 26 л.**

Книга содержит аксиоматическое изложение теории гомологий — наиболее развитой ветви алгебраической топологии. Теория гомологий в связи с таким построением приобретает существенно более доступный вид. Преимущества чисто научного характера делают книгу интересной не только начинающему, но и каждому специалисту-топологу.

**122. ТОТ Л., Расположения в плоскости, на шаре и в пространстве, перев. с нем., Гостехиздат, 15 л.**

Небольшая монография известного венгерского математика, посвященная разнообразным задачам о плотнейшем расположении фигур или тел, а также связанным с этим вопросом. Содержит богатый материал, интересный и полезный для студентов и аспирантов университетов и пединститутов. Часть этого материала может быть использована преподавателями средней школы в работе математических кружков.

**123. Труды III Всесоюзного математического съезда, т. III, Изд-во АН СССР, 55 л.**

**124. То же, т. IV, Изд-во АН СССР, 55 л.**

**125. Труды Московского математического общества, вып. VI, Гостехиздат, 30 л.**

Сборник исследований советских математиков, содержащий новые результаты важного научного значения. Включает работы, доложенные на заседаниях Московского математического общества. Рассчитан на научных работников в области физико-математических наук.

**Содержание:** М. Ф. Бокштейн, Гомологические инварианты топологических пространств; Л. А. Скорняков, Системы кривых на плоскости; Г. Б. Гуревич, Условия изоморфизма стандартных нуль-алгебр; А. А. Ляпунов, Об операциях над множествами допускающих трансфинитные индексы; С. И. Адян, Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп; Б. И. Плоткин, Радикальные и полупростые группы; П. К. Рашевский, О линейных представлениях дифференциальных групп и групп Ли с нильпотентным радикалом; Ф. А. Березин, Операторы Лапласа на полупростых группах Ли; О. А. Ладыженская, О построении разрывных решений квазилинейных гиперболических уравнений как пределов решений соответ-



ствующих параболических уравнений при стремлении «коэффициента вязкости» к нулю; Б. М. Левитан, Исправления к работе «Об асимптотическом поведении спектральной функции и разложении по собственным функциям уравнения  $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, x_3)\}u = 0$ ». (Труды Моск. матем. об-ва, 4 (1955)); И. С. Иохвидов и М. Г. Крейн, Замечание к статье «Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, I» (Труды Моск. матем. об-ва, 5 (1956)).

**126. Ученые записки Московского государственного университета, вып. 186, Математика, т. IX, Изд-во МГУ, 16 л.**

Содержание: А. Б. Шидловский, О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов; П. Л. Ульянов, О локальных свойствах сходящихся рядов Фурье; К. В. Темко, Выпуклая емкость и ряды Фурье; К. В. Темко, Средние арифметические Рисса в теории тригонометрических рядов; Ю. А. Шрейдер, Непрерывные групповые спектры; Л. А. Чудов, Об определении симметрического оператора с индексом дефекта (1, 1) по спектрам двух самосопряженных расширений; А. А. Юшкевич, О дифференцируемости переходных вероятностей однородного марковского процесса со счетным числом состояний; М. И. Грабарь, Об однородности динамических систем и проблеме Биркгофа; Ю. Л. Рабинович, Рекуррентные дифференциальные уравнения; Ю. К. Солнцев, О непрерывной зависимости от начальных условий решений систем дифференциальных уравнений с кусочно непрерывными правыми частями; Г. А. Каменский, Об уравнениях с отклоняющимся аргументом; А. Г. Цванг, Об особых точках дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом; Р. С. Гусарова, Об устойчивости решения задачи Коши для системы линейных уравнений с частными производными; А. В. Игнатьева, Об одном специальном представлении функций многих переменных; С. В. Смирнов, О номографировании общих интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка; Г. Е. Джемс-Леви, О номографическом методе доказательства некоторых теорем.

**127. ХОВАНСКИЙ А. Н., Приложения цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа, Гостехиздат, 8 л.**

В последние годы интерес к цепным дробям возрос в связи с их приложениями к вычислительной математике. В книге рассматриваются разложения в цепные дроби различным образом заданных функций, важнейшие признаки сходимости и другие вопросы. Предназначена для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся по вычислительной математике.

**128. ХОВАНСКИЙ Г. С., Построение номограмм с ориентированным транспарантом, Гостехиздат, 8 л.**

В монографии излагаются общие принципы и конкретные примеры построения номограмм с ориентированным транспарантом, имеющих важные преимущества для решения систем уравнений с большим числом переменных и упрощения многих сложных расчетов из различных областей техники. Предназначена для инженеров-расчетчиков и работников в области вычислительной математики.

**129. ШЕВАЛЛЕ К., Теория групп Ли, т. II и III, перев. с франц., ИЛ, 25 л.**

Второй и третий тома монографии, изданной в Париже в 1951, 1955 гг., содержащей систематическое современное изложение теории групп Ли. Перевод первого тома вышел в 1948 г. Во втором томе излагается теория алгебраических групп, в третьем — фундаментальные теоремы теории алгебр Ли.

130. ШИФФЕР М. и СПЕНСЕР Д., Функционалы на конечных римановых поверхностях, перев. с англ., ИЛ, 22 л.

В книге с точки зрения функционального анализа систематически строится теория конечных римановых поверхностей, образующая важный раздел современной теории функций. Изучаются, в частности, вариационные задачи на этих поверхностях. Начиная с изложения классических результатов, авторы вводят читателя в круг современных идей и методов этой области математики. Для чтения книги необходимо знакомство с теорией функций комплексного переменного в объеме университетского курса и с основами комбинаторной топологии.

131. ЯНО К. и БОХНЕР С., Кривизна и числа Бетти, перев. с англ., ИЛ, 8 л.

Книга, изданная в США в 1953 г., представляет собой весьма доступно написанное введение в топологические вопросы дифференциальной геометрии в целом. В ней тесно переплетаются методы математического анализа, топологии и дифференциальной геометрии.

#### Б. СОБРАНИЯ СОЧИНЕНИЙ, ИЗБРАННЫЕ РАБОТЫ

132. ГАУСС К. Ф., Избранные сочинения в двух томах, т. I, Геодезиздат, 12 л.

Содержит труды и заметки Гаусса по способу наименьших квадратов, переведенные вновь с латинского и немецкого оригиналов.

133. ЛАППО-ДАНИЛЕВСКИЙ И. А., Теория функций от матриц, Гостехиздат, 35 л.

Книга представляет собой сборник работ известного советского математика, который первым занялся исследованием свойств функций от матриц. С помощью этого понятия ему удалось получить важные результаты в теории дифференциальных уравнений. Сборник подготовлен к печати академиком В. И. Смирновым.

134. ЛУЗИН Н. Н., Собрание сочинений, т. II, Изд-во АН СССР, 50 л.

135. ЭЙЛЕР Л., Интегральное исчисление, перев. с латинского в 3 томах, т. I, Гостехиздат, 27 л.

136. То же, т. II, Гостехиздат, 25 л.

137. То же, т. III, Гостехиздат, 25 л.

Классический труд одного из крупнейших мировых математиков, впервые переведенный на русский язык. Выходит в серии «Классики естествознания», хорошо оформлен. Издается к 250-летию со дня рождения Эйлера. Содержит теорию интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений второго и высших порядков. Рассчитан на научных работников в области математики и преподавателей математики.

#### В. ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИКИ

138. Историко-математические исследования, вып. X, под ред. Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича, Гостехиздат, 30 л.

Очередной выпуск серийного издания, в котором помещаются статьи, посвященные исследованию творчества отечественных и иностранных математиков, а также развитию отдельных школ и направлений, отдельных дисциплин и т. д. Данный выпуск посвящен в значи-

тельной части Л. Эйлеру в связи с 250-летием со дня его рождения. Рассчитан на научных работников и преподавателей в области математики, истории и философии.

**139. ЛИ ЯНЬ, История китайской математической науки, перев. с китайского, Гостехиздат, 15 л.**

Перевод содержательной и интересной книги крупного китайского специалиста, заполняющий существующий в советской литературе пробел по истории математики Китая. Знакомство с одной из сторон развития многовековой культуры великого братского народа безусловно представляет большой интерес для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов-математиков и историков.

**140. МОЛОДШИЙ В. Н., Очерки по вопросам обоснования математики, Учпедгиз, 16 л.**

Содержание: Предмет и материальные источники развития математики. Значение математики для техники, других наук и жизни людей. Цель и средства логического обоснования математики. Содержание и значение математических рукописей К. Маркса. Аксиоматический метод. Предмет и значение математической логики.

**141. ПОЛИА Г., Математика и правдоподобные рассуждения, перев. с англ., ИЛ, 30 л.**

Книга, изданная в США в 1954 г., написана одним из крупнейших аналитиков, известным нашим читателям по книге «Задачи и теоремы из анализа», написанной им совместно с Г. Сеге. На примерах из истории математики в книге показывается, как крупнейшие ученые (Эйлер и др.) приходили к открытию математических истин. Будет иметь большое значение для пропаганды математических знаний. Книга полезна широкому кругу интеллигенции, интересующейся историей науки.

**142. Труды Института истории естествознания и техники АН СССР, т. XV, История физико-математических наук, Изд-во АН СССР, 25 л.**

Статьи и публикации. Значительная часть материалов посвящена акад. А. Н. Крылову к 10-летию со дня его смерти (1945 г.). Статьи и воспоминания С. И. Вавилова, А. Ф. Иоффе, В. И. Смирнова, М. А. Ша-телена и других ученых; переписка А. Н. Крылова с адмиралом С. О. Макаровым, Н. Е. Жуковским и др. Том содержит также статьи о В. Гамильтоне, о русском историке математики В. В. Бобынине, статью по истории теории аналитических функций и др.

**143. Труды Института истории естествознания и техники АН СССР, т. XVII, Изд-во АН СССР, 25 л.**

Том содержит, в частности, статьи по истории математики, в которых рассказывается о работах Леонарда Эйлера, М. В. Остроградского и В. Л. Буяковского. Рассчитан на научных работников в области физики и математики, а также на историков науки.

### III. СПРАВОЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА

#### А. СПРАВОЧНИКИ ОБЩЕГО ТИПА

**144. БРОНШТЕЙН И. Н. и СЕМЕНДЯЕВ К. А., Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов, изд. 7, Гостехиздат, 44 л.**

Содержит следующие отделы: Таблицы и графики. Элементарная математика. Аналитическая и дифференциальная геометрия. Основы математического анализа. Дополнительные главы анализа. Обработка наблюдений.

- 145. ВЫГОДСКИЙ М. Я., Справочник по элементарной математике.** изд. 10, Гостехиздат, 25 л.

Содержит таблицы и справочный материал по всем разделам школьного курса математики. Большое внимание уделяется разъяснению основных понятий и важнейших методов элементарной математики. Содержит также большое количество исторических сведений. Может быть использован как школьниками, так и лицами, самостоятельно изучающими математику.

- 146. ВЫГОДСКИЙ М. Я. Справочник по высшей математике,** изд. 2, Гостехиздат, 40 л.

Справочник включает весь материал вузовской программы по высшей математике. Может служить пособием при изучении или повторении вузовского курса; содержит много различных разъяснений, трудных мест и указаний на часто встречающиеся ошибки.

- 147. ПАНОВ Д. Ю., Счетная линейка,** изд. 11, Гостехиздат, 9 л.

Назначение книги — научить считать на счетной линейке и служить справочником в дальнейшей работе для лиц, уже выучившихся пользоваться ею. Может служить учебным пособием для учащихся техникумов и вузов при прохождении соответствующего раздела курса математики.

- 148. СЕМЕНДЯЕВ К. А. Счетная линейка (краткое руководство),** изд. 8, Гостехиздат, 3 л.

Небольшая брошюра, имеющая целью научить выполнению на счетной линейке всех основных операций.

- 149. ШАХНО К. У., Справочник по математике,** вып. I, Учпедгиз, 10 л.

Содержит важнейшие вопросы арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии по программе школьного курса. В нем несколько шире, чем принято в книге, излагаются комплексные числа, исследование функций, построение графиков, обратные тригонометрические функции. Предназначен для учителей и учащихся VIII—X классов.

#### Б. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТАБЛИЦЫ И СПРАВОЧНЫЕ ИЗДАНИЯ

- 150. АНГЕЛОВ С. А., Шестизначные таблицы натуральных значений тригонометрических функций с аргументом, выраженным в часовой мере,** Гостехиздат, 30 л.

В таблицах даны натуральные значения всех шести тригонометрических функций от аргумента, выраженного в часовой мере, что позволяет обходиться без специальных таблиц и расчетов для перехода от часовой меры углов к градусной, для которой составлено большинство таблиц. В таблицах С. А. Ангелова везде выдержана точность в шесть значащих цифр. Предназначены для работников вычислительных бюро, геодезистов, астрономов и топографов, а также работников смежных специальностей.

- 151. ВЗОРОВА А. И., Таблицы для решения уравнения Лапласа в эллиптических областях, Математические таблицы (Вычислительный центр АН СССР),** Изд-во АН СССР, 25 л.

Таблицы могут быть использованы при инженерных расчетах. Предназначаются для решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа.

152. КАРПОВ К. А., Таблицы функций  $F(z) = \int_0^z e^{x^2} dx$  в комплексной области, Изд-во АН СССР, 30 л.

153. ЛУКОМСКАЯ А. М., Библиографические источники по математике и механике, изданные в СССР в 1917—1952 гг., под ред. акад. В. И. Смирнова (Библиотека АН СССР), Изд-во АН СССР, 29 л.

Аннотированы отдельно изданные библиографические указатели, а также внутрикнижная и пристатейная библиография. Материал снабжен вспомогательными указателями.

154. ЧИСТОВА Э. А., Таблицы функций Бесселя действительного переменного и интегралов от них, Изд-во АН СССР, 40 л.

#### IV. ПОПУЛЯРНАЯ ЛИТЕРАТУРА

155. АРГУНОВ Б. И. и БАЛК М. Б., Геометрические построения на плоскости, изд. 2, Учпедгиз, 14 л.

156. ГНЕДЕНКО Б. В. и ХИНЧИН А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей, изд. 4, Гостехиздат, 8 л.

157. ДЕПМАН И. Я., Метод математической индукции, Учпедгиз, 3,5 л.

158. ЗЕТЕЛЬ С. И., Геометрия линейки и геометрия циркуля в средней школе, Учпедгиз, 5 л.

Содержит 140 геометрических задач на построение, предназначается для кружковой работы в VI и VII классах.

159. КОЛОСОВ А. А., Книга для чтения по математике, Учпедгиз, 8 л.

В книге даются: история развития математических понятий, биографии выдающихся математиков, практические приложения математики, занимательные задачи, софизмы, математические этюды. Предназначена для учащихся VIII класса.

160. КОРДЕМСКИЙ Б. А., Математическая смекалка, изд. 4, Гостехиздат, 26 л.

Сборник разнообразных и занимательных математических задач, головоломок, игр, фокусов и развлечений. Книга богато иллюстрирована и хорошо оформлена. Интересна как для детей среднего и старшего возраста, так и для взрослого читателя с самым разнообразным уровнем математической подготовки.

161. КОРДЕМСКИЙ Б. А. и ОСТРОВСКИЙ А. И., Геометрия помогает арифметике, Гостехиздат, 5 л.

В книге рассматривается применение некоторых геометрических (графических и графико-вычислительных приемов) к решению разнообразных арифметических и алгебраических задач. Решение задач осуществляется при помощи диаграмм и графиков («геометрических моделей» условия задачи). Построение «моделей» дает возможность «увидеть» задачу — установить и исследовать связи, существующие между величинами, входящими в задачу, выбрать кратчайший путь ее решения. Предполагаемый объем знаний у читателя — не менее восьми классов. Книга предназначена для самостоятельной работы и для математических кружков IX—X классов.

**162. КУПЦОВ Г. Г., Способы рационализации выполнения действий над числами, Учпедгиз, 5 л.**

Предназначена для учащихся VII—X классов.

**163. НАГИБИН Ф. Ф., Математическая шкатулка, Учпедгиз, 7 л.**

Книга содержит занимательные задачи, софизмы, числовые головоломки. Предназначена для учащихся V—VII классов.

**164. ПЕРЕЛЬМАН Я. И., Занимательная геометрия, изд. 10, под ред. и с дополнениями Б. А. Кордемского, Гостехиздат, 15 л.**

Книга известного популяризатора математики, физики, механики и астрономии. Содержит ряд занимательных задач и сведений из области элементарной геометрии.

**165. ТЕУШ В. А., Графики и номограммы функций, Учпедгиз, 5 л.**

Рассматриваются графики и простейшие номограммы функций одной переменной. Может быть использована и для внеклассной работы.

**166. ЯГЛОМ А. М. и ЯГЛОМ И. М., Вероятность и информация, Гостехиздат, 7 л.**

Книга популярно излагает основные понятия теории информации и ее применения. Эта новая отрасль математики, созданная в последние годы, имеет важные приложения в теории связи, теории систем автоматического управления и других вопросах. Книга рассчитана на школьников старших классов, учителей, инженерно-технических работников.

Серия «Популярные лекции по математике»

**167. АРГУНОВ Б. И. и СКОРНЯКОВ Л. А., Конфигурационные теоремы, Гостехиздат, 3 л.**

Брошюра в популярной форме излагает некоторые классические вопросы проективной геометрии (теоремы Паппа и Дезарга). Иллюстрируются применения этих теорем к задачам, связанным со школьным курсом геометрии (задачи на построение, изучение свойств многоугольников). Доступна школьникам старших классов.

**168. БОЛТЯНСКИЙ В. Г., Огибающие, Гостехиздат, 3 л.**

Брошюра в популярной форме излагает понятие огибающей, имеющее важное значение в высшей математике. Понятие это разъяснено на отдельных примерах из физики. Взятые примеры приводят к рассмотрению кривых второго порядка (эллипс, гипербола, парабола), играющих большую роль в математике и ее приложениях. Рассчитана на учащихся старших классов средней школы, студентов младших курсов вузов, преподавателей математики и других лиц, интересующихся математикой.

**169. ТРАХТЕНБРОТ Б. А., Алгоритмы и машинное решение задач, Гостехиздат, 3 л.**

Брошюра рассматривает в популярной форме некоторые вопросы математической логики, связанные с конструированием и применением быстродействующих цифровых машин. Автор подробно разбирает применение этих машин для решения логических задач, схему так называемой машины Тьюринга, алгоритмически неразрешимые проблемы и ряд других интересных вопросов, недостаточно освещенных до сих

пор в популярной литературе. Рассчитана на школьников старших классов, преподавателей, инженерно-технических работников и всех лиц, интересующихся перспективами применения новой вычислительной техники.

**170. УСПЕНСКИЙ В. А., Решение математических задач методами механики, Гостехиздат, 3 л.**

Как известно, решение многих математических задач может быть получено с помощью построения моделей. При этом иногда не обязательно производить измерения, а можно воспользоваться известными законами физики и механики, которые дают возможность предсказать, как будет протекать явление. Такому решению математических задач с помощью соображений механики и посвящена данная брошюра.

*А. З. Рывкин.*

---

## СОДЕРЖАНИЕ <sup>1)</sup>

От редакции . . . . .	3
Памяти Р. Н. Бончковского . . . . .	7
Вопросы преподавания математики на XIX международной конференции в Женеве:	
1. А. И. Маркушевич. На XIX международной конференции по народному просвещению . . . . .	9
2. Рекомендация конференции министерствам народного просвещения, относящаяся к преподаванию математики в средних школах ( <i>Перевод с французского А. И. Маркушевича</i> ) . . . . .	15
3. В. Сервэ (W. Servais, Бельгия). Преподавание математики в средних школах ( <i>Доклад на конференции. Перевод с французского М. З. Кайнера</i> ) . . . . .	22

### I. ОБЗОРЫ, СТАТЬИ, ПЕРЕВОДЫ

Е. М. Ландис. О длине кривой . . . . .	33
Я. С. Дубнов. Тригонометрия в школьном курсе геометрии . . . . .	45
А. А. Ляпунов и Г. А. Шестопал. Начальные сведения о решении задач на электронных вычислительных машинах . . . . .	57
Дж. Тодд (J. Todd, США). Мотивы для работы в области численного анализа ( <i>Перевод с английского Г. А. Шестопал под ред. К. А. Семдяева</i> ) . . . . .	75
Ю. М. Гайдук. Из прошлого и настоящего английской Математической ассоциации и «Математической газеты» . . . . .	87

### II. НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

В. Г. Ашкинзуе. О числе полуправильных многогранников . . . . .	107
Н. М. Бескин. Теоремы Чевы и Менелая в $n$ -мерном пространстве . . . . .	119
А. Л. Бондарев. Обобщение формулы Тейлора . . . . .	129
В. П. Паламодов. О многочленах, образующих возвратную последовательность 2-го порядка . . . . .	139
Ф. С. Рофе-Бекетов. О краевой задаче для нелинейного дифференциального уравнения . . . . .	149
З. А. Скопец. «Плоскости $n$ » косого четырехугольника и связанные с ними тетраэдры Мёбиуса . . . . .	155
И. Я. Танатар. О шаре, вписанном в выпуклую четырехугольную пирамиду . . . . .	163

<sup>1)</sup> Материалы, помещенные на стр. 6, 32 и 105, 128, 138, 148, 162 и 166, 182, 210 и 228 в содержание не включены.



## III. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ СООБЩЕНИЯ

(Опыт преподавания и педагогический эксперимент)

- Н. Я. Виленькии. О равномерной непрерывности функции . . . . . 167  
 А. М. Лопшиц. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие и интерполяционная задача Эрмита . . . . . 169

## IV. НАУЧНАЯ И ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ХРОНИКА

- Н. М. Коробов. Третий Всесоюзный математический съезд . . . . . 177  
 А. П. Норден. Казанское физико-математическое общество . . . . . 179  
 Л. Я. Цлаф. Объединенный научно-методический семинар кафедр высшей математики московских вузов . . . . . 183  
 Е. Б. Дынкин и И. В. Гирсанов. XIX школьная математическая олимпиада в Москве . . . . . 187  
 Обсуждение новых стабильных учебников по математике . . . . . 195

Новости математической науки:

1. А. Сельберг. Элементарное доказательство асимптотического закона распределения простых чисел (И. И. Пятецкий-Шапиро) 211
2. И. Г. Петровский и Е. М. Ландис. Число предельных циклов дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = \frac{P_2(x, y)}{Q_2(x, y)}$  (Е. М. Ландис) 213
3. Т. Банг — В. Фенхель. Решение одной задачи о покрытии выпуклых фигур (И. М. Яглом.) . . . . . 214

## V. ЗАДАЧИ

Под ред. И. М. Яглома

- От редакции . . . . . 219  
 1. Задачи по элементарной математике . . . . . 219  
 2. Задачи по высшей математике . . . . . 224

## VI. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

- В. Б. Орлов. Издание математической литературы Гостехиздатом за 25 лет . . . . . 229  
 Г. Б. Гуревич. Учебник алгебры В. Л. Гончарова . . . . . 243  
 И. М. Яглом. Новые книги по теории геометрических построений . . . 251  
 Ю. М. Гайдук. Как решать математическую задачу (О книге Г. Полиа) 255  
 Б. А. Кордемский. Две зарубежные книги по занимательной математике . . . . . 261  
 Книги по математике, выходящие в 1957 г. (А. З. Рывкин) . . . . . 269

## В СЛЕДУЮЩЕМ (ВТОРОМ) ВЫПУСКЕ «МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОСВЕЩЕНИЯ» БУДЕТ НАПЕЧАТАНО:

### ОБЗОРЫ, СТАТЬИ, ПЕРЕВОДЫ:

- В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович. Очерк основных идей топологии.
- А. О. Гельфонд. О проблеме приближения алгебраических чисел рациональными.
- А. М. Лопшиц. К вопросу о преподавании теории определителей.
- А. А. Ляпунов и Г. А. Шестопап. Об алгоритмическом описании процессов управления.
- Дж. Тодд (США). Мотивы для работы в области численного анализа. (Окончание.)
- В. Бляшке (ФРГ). Греческая и наглядная геометрия.
- Цикл статей на тему: «Введение действительных чисел в средней и высшей школе».

### НАУЧНЫЕ И НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ СООБЩЕНИЯ.

#### НАУЧНАЯ И ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ХРОНИКА:

Празднование 250-летия со дня рождения Эйлера. — В школьном математическом кружке МГУ. — Некоторые сведения о французской школе и преподавании в ней математики. — Анкета журнала «Cahiers pédagogiques» на тему «Современная математика и преподавание». — Новости математической науки.

#### ЗАДАЧИ.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА:

К проблеме создания учебника по математике для средней школы. — Рецензии на советские и зарубежные книги по математике —

#### И ДРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ.